Asymptotische Entwicklungen und ihre Anwendungen in technischen Problemstellungen

Andreas Meister und Thomas Sonar

17. April 2001

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Das vorliegende Manuskript ist die Ausarbeitung einer Vorlesung, die die Autoren im Sommersemester 1997 an der Technischen Universität Hamburg-Harburg (TUHH) gehalten haben. Der formale Rahmen, der diese Vorlesung an der TUHH erst möglich gemacht hat, war ein Austausch von Lehrveranstaltungen, der hier erstmals versucht wurde. Während wir diese Vorlesung an der TUHH lasen, hielt Herr Prof. Dr. Helmut Weberpals (Technische Informatik II) von der TUHH eine Vorlesung *Parallele Algorithmen* an der Universität Hamburg, und zwar im gleichen Stundenumfang (vier Wochenstunden). Dieser Austausch fand im Rahmen des Lehrexportes der Universität Hamburg an die TUHH statt und sollte als Zeichen verstanden werden, wie fruchtbar die Kooperation zweier Hochschulen sein kann, die sich nur 30 S-Bahn-Minuten voneinander entfernt befinden. Die Autoren möchten sich bei Herrn Prof. Dr. Helmut Weberpals herzlich für seinen Einsatz in diesem Austausch bedanken, den er selbstlos unterstützt und getragen hat.

Sowohl Herr Prof. Dr. Weberpals als auch wir hatten unsere Vorlesung für Studenten der Mathematik, Naturwissenschaften und Ingenieurwissenschaften geöffnet. Wir hatten damit gehofft, Studenten dies- und jenseits der Elbe dazu zu bewegen, sich für eine interessante Vorlesung in die jeweils andere Hochschule zu bewegen. Dieser, von unserem Standpunkt sehr erwünschte, Effekt ist leider ausgeblieben. Durch das bereits stark verschulte und damit reglementierte Ingenieurstudium hatten wir zusätzlich mit kleinen Studentenzahlen zu kämpfen, da sich niemand 'zusätzlicher' Arbeit aussetzen wollte.

Unsere Vorlesung resultierte letztlich aus dem DFG-Projekt So 363/3-1, in dem die Entwicklung eines numerischen Verfahrens zur Lösung der Euler-Gleichungen der Gasdynamik für alle Geschwindigkeitsbereiche bewerkstelligt werden soll. Diese Entwicklung baut auf einer Mehrskalenasymptotik auf, die Prof. Dr. Rupert Klein erstmalig für die Bewegungsgleichungen der Gasdynamik durchgeführt hat[1]. In diesem Projekt haben wir die Aufgabe, mehrskalige Filteralgorithmen zu entwerfen, die Aussagen darüber erlauben, ob man sich im Bereich der Gültigkeit der Asymptotik befindet. Uns war von vornherein klar, daß wir nur mit einem genauen Wissen um die Feinheiten der Mehrskalenasymptotik in dieses Projekt starten könnten. Erschwerend kam hinzu, daß wir uns nie zuvor mit asymptotischer Analysis beschäftigt hatten. Das vorliegende Skript dokumentiert also nun zum einen unseren Zugang zum faszinierenden Gebiet der asymptotischen Analysis, zum anderen findet sich hier die mathematische Aufarbeitung der Kleinschen Multiskalenanalyse. Wir hoffen daher, mit diesem Skript nicht nur eine Einführung zu geben, sondern den Leser an aktuelles Forschungsgebiet heranzuführen, das im Grenzbereich von Mathematik, Physik und Ingenieurwissenschaft liegt.

Bedanken möchten wir uns bei der Deutschen Forschungsgemeinschaft, durch deren Förderung das Forschungsprojekt So 363/3-1 möglich wurde. Herr Lars Hoffmann hat unsere Vorlesung kritisch begleitet und dieses Manuskript quergelesen, wofür ihm Dank gebührt. Herzlicher Dank geht auch an unseren 'guten Geist' Frau Monika Jam-

[1] R. Klein – Semi-Implicit Extension of a Godunov-Type Scheme Based on Low Mach Number Asymptotics I: One-Dimensional Flow, *J. Comp. Phys.* **121**, *213-237, (1995)*

PERT, die unsere handschriftlichen Manuskripte mit gewohnter Perfektion und nicht zu erschütternder Übersicht in LaTeX verwandelt hat. Zudem stammen die meisten Abbildungen aus Frau Jamperts Hand.

Hamburg, im September 1997

ANDREAS MEISTER
THOMAS SONAR

1 Einleitung

1.1 Ein motivierendes Beispiel

Wir betrachten ein „dünnes“ Profil in einer zweidimensionalen Luftströmung wie in Abbildung 1.1 gezeigt.

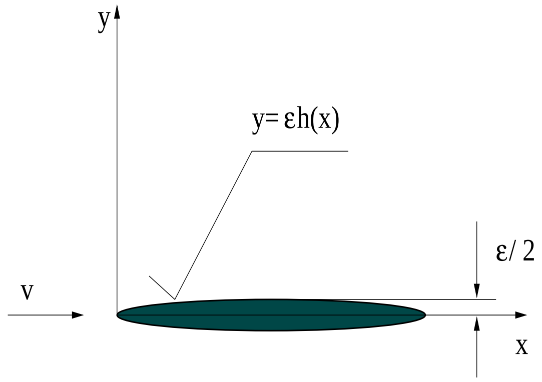


Abbildung 1.1: Dünnes Profil in einer Luftströmung

Dabei kann es sich um den zweidimensionalen Schnitt des Tragflügels eines Flugzeuges handeln, solche Profile findet man aber auch in Hochspannungsschaltern, bei der eine Luftströmung den Schaltlichtbogen möglichst schnell ausblasen soll.

Das Profil sei symmetrisch zur x-Achse. Die Anströmgeschwindigkeit[2] sei $\underline{v}_\infty := (v_{1,\infty}, v_{2,\infty})^T = (1,0)^T$. Der Rand des Profils sei für nichtnegative y-Werte beschrieben durch die Funktion $y(x;\epsilon) = \epsilon h(x)$. Die Größe ϵ ist ein Parameter, der die Dicke des Profils beschreibt.

In unserer Strömung seien Reibungseffekte vernachlässigbar, allerdings ströme die Luft so heftig, daß wir Kompressibilitätseffekte unbeding beachten müssen[3]. Aus der Gasdynamik entnimmt man als mögliche Bewegungsgleichung für solche Strömungen die **nichtlineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung** für das **Strömungspotential** Φ

$$\left(c^2 - (\partial_x\Phi)^2\right)\partial_x^2\Phi - 2\partial_x\Phi\cdot\partial_y\Phi\cdot\partial_x\partial_y\Phi + \left(c^2 - \partial_y\Phi)^2\right)\partial_y^2\Phi = 0. \qquad (1.1.1)$$

Eine reellwertige Funktion $\Phi = \Phi(x,y)$ heißt Geschwindigkeitspotential, wenn die Geschwindigkeit des Strömungsfeldes gerade der Gradient des Potentials ist, d.h.

$$\underline{v} = \nabla\Phi = \begin{bmatrix} \partial_x\Phi \\ \partial_y\Phi \end{bmatrix}.$$

[2] Wir verwenden konsequent **Spaltenvektoren**. Deshalb taucht in der Zeilenschreibweise die Transposition ^{T} auf. Vektoren werden einmal unterstrichen, Matrizen zweimal.

[3] Bei einer ungestörten Bewegung eines Fahr- oder Flugzeuges ist Luft bis Geschwindigkeiten von etwa 300 km/h in guter Näherung inkompressibel, hinter dieser Grenze spielen Effekte durch die Zusammendrückbarkeit der Luft eine große Rolle.

Es handelt sich bei (1.1.1) um eine Gleichung zweiter Ordnung, weil die höchsten vorkommenden Ableitungen gerade zweite Ableitungen sind. Die Faktoren vor den höchsten Ableitungen hängen ihrerseits wieder von der Lösung Φ ab, daher handelt es sich nicht mehr um eine lineare Gleichung, was die Lösung außerordentlich erschwert[4].

In unserer Gleichung bezeichnet die Funktion c die **lokale Schallgeschwindigkeit**, die durch die Beziehung

$$c^2 = \frac{1}{\mathrm{Ma}_\infty^2} + \frac{\kappa - 1}{2}\left(1 - (\partial_x \Phi)^2 - (\partial_y \Phi)\right) \tag{1.1.2}$$

gegeben ist. Dabei bezeichnet Ma_∞ die **Machsche Zahl** der Anströmung, $\mathrm{Ma}_\infty := \frac{|\underline{v}_\infty|}{c_\infty}$, c_∞ ist die Schallgeschwindigkeit in der Anströmung und κ ist der **Isentropenexponent**, den man für Luft als $\kappa = 1.4$ ansetzt.

Wie Sie vielleicht gar nicht bemerkt haben, haben wir in unsere Gleichung bereits eine „Normierung“ eingeschmuggelt! Natürlich wollen wir nahezu beliebige Anströmgeschwindigkeiten zulassen, wir gehen aber oben stets von $|\underline{v}_\infty| = 1$ aus. Sie sollten sich dazu vorstellen, daß wir bei beliebiger Anströmung $\underline{\tilde{v}}_\infty := (\tilde{v}_{1,\infty}, 0)^T$ in x-Richtung durch den Betrag $|\underline{\tilde{v}}_\infty| = |\tilde{v}_{1,\infty}|$ dividieren. Damit schlagen wir zwei Fliegen mit einer Klappe: Zum einen ist nun unsere Anströmgeschwindigkeit immer dem Betrage nach eins, zum anderen haben wir die Geschwindigkeit aber auch **entdimensionalisiert**. Das heißt, daß unsere Geschwindigkeit $\underline{v}$ keine physikalische Einheit mehr besitzt, denn es gilt ja

$$\underline{v}_\infty = \frac{1}{|\underline{\tilde{v}}_\infty|} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{v}_{1,\infty}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]}{|\tilde{v}_{1,\infty}|\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wir werden im Verlauf der Vorlesung noch sehen, daß die Entdimensionalisierung eines vorgelegten Problems ein sehr wichtiger Bestandteil nahezu jeder asymptotischen Analyse ist. An dieser Stelle wollen wir nur festhalten, daß die Schallgeschwindigkeit der Anströmung durch unsere Entdimensionalisierung gerade durch $c_\infty = \frac{1}{\mathrm{Ma}_\infty}$ gegeben ist, denn nach Definition ist $\mathrm{Ma}_\infty = \frac{|\underline{v}_\infty|}{c_\infty}$ und durch die Entdimensionalisierung ist $|\underline{v}_\infty| = 1$.

Nun ist Gleichung (1.1.1) nicht ohne **Randbedingungen** lösbar, das sind besondere Bedingungen, die das Potential am Rand des Profiles und in der Anströmung, dem sogenannten **Fernfeld**, erfüllen müssen. Im Fernfeld ist die Anströmgeschwindigkeit gegeben, das heißt wir verlangen

$$\begin{aligned} v_1 &= \partial_x \Phi = 1, \quad x^2 + y^2 \to \infty \\ v_2 &= \partial_y \Phi = 0, \quad x^2 + y^2 \to \infty, \end{aligned}$$

im Potential ausgedrückt muß im Fernfeld also

$$\Phi(x, y) = x, \quad x^2 + y^2 \to \infty$$

[4]Es sei angemerkt, daß selbst das Existenzproblem nicht allgemein gelöst ist, d.h. es ist in einigen (praktisch wichtigen) Fällen nicht klar, ob überhaupt Lösungen zu dieser Gleichung existieren!

erfüllt sein. Am Körperrrand auf der Kurve $y = \epsilon h(x)$ verlangen wir, daß die Strömung nicht in das Profil eindringen darf. Da die Strömung als reibungsfrei vorausgesetzt wurde, darf am Profilrand noch eine tangentiale Geschwindigkeitskomponente vorhanden sein, siehe Abbildung 1.2, aber keine Normalkomponente.

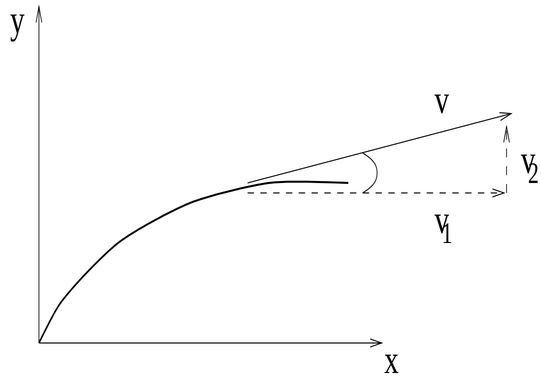


Abbildung 1.2: Tangentialgeschwindigkeit am Körperrand

Aus dieser Abbildung ersieht man sofort

$$\frac{v_2}{v_1} = \tan\theta = \frac{d}{dx}(\epsilon h(x)) = \epsilon \frac{dh}{dx}, \quad y = \epsilon h(x).$$

Das bedeutet für das Potential die **Körperrandbedingung**

$$\partial_y \Phi(x, \epsilon h(x)) = \epsilon h'(x) \partial_x \Phi(x, \epsilon h(x)).$$

Die Lösung Φ der partiellen Differentialgleichung hängt also nicht nur von x und y, sondern über die Randbedingungen auch von ϵ ab. Wir schreiben

$$\Phi = \Phi(x, y; \epsilon)$$

und starten nun endlich mit der eigentlichen **asymptotischen Analyse**.

Wir wiederholen zuerst unsere Grundannahme: Das Profil sei „sehr dünn“, wir schreiben $\epsilon \ll 1$ („ϵ sehr viel kleiner als 1“). Im Fall $\epsilon \to 0$ ergibt sich als Lösung von (1.1.1) offenbar das Potential der Anströmung, da in diesem Fall das Profil verschwunden ist, d.h. die Lösung ist $\Phi(x, y; 0) = x$. Für $0 < \epsilon \ll 1$ erwarten wir also eine **leicht gestörte** Anströmung. Dazu machen wir den folgenden Ansatz:

$$\boxed{\Phi(x, y; \epsilon) = x + \epsilon \varphi_1(x, y) + \epsilon^2 \varphi_2(x, y) + \epsilon^3 \varphi_3(x, y) + \ldots}$$

Dies ist eine **asymptotische Entwicklung** des Potentials nach dem Dickenparameter ϵ. Die Funktionen $\varphi_j, j = 1, 2, \ldots$ heißen Störpotentiale j-ter Ordnung.

Wie man sieht, liefert die asymptotische Entwicklung für $\epsilon = 0$ die korrekte Lösung (anderenfalls wäre die Entwicklung sicher unbrauchbar!). Jetzt **hoffen** wir, daß die

Entwicklung für kleine positive ϵ die Lösung des Problems (1.1.1) mit den entsprechenden Randbedingungen repräsentiert, aber das ist keinesfalls sicher! Wäre etwa $\Phi(x, y; \epsilon) = (1 + \sqrt{\epsilon}) f(x, y)$ mit irgendeiner nur von x und y abhängigen Funktion f die exakte Lösung von (1.1.1) unter den angegebenen Randbedingungen, dann hätten wir mit einem Ansatz mit ganzzahligen Exponenten gar keine Chance, mit unserer asymptotischen Entwicklung die Lösung zu repräsentieren[5].

Wir werden nun die asymptotische Entwicklung (1.1.3) in die partielle Differentialgleichung (1.1.1) einsetzen. Um die dann entstehenden Terme nach Potenzen von ϵ ordnen zu können, ist zu Beginn eine kleine Nebenrechnung angebracht. Durch formales Ableiten von (1.1.3) ergeben sich die folgenden asymptotischen Entwicklungen.

$$
\begin{aligned}
\partial_x \Phi &= 1 + \epsilon \partial_x \varphi_1 + \epsilon^2 \partial_x \varphi_2 + \dots \\
\partial_y \Phi &= \epsilon \partial_y \varphi_1 + \epsilon^2 \partial_y \varphi_2 + \dots \\
\partial_x^2 \Phi &= \epsilon \partial_x^2 \varphi_1 + \epsilon^2 \partial_x^2 \varphi_2 + \dots \\
\partial_y^2 \Phi &= \epsilon \partial_y^2 \varphi_1 + \epsilon^2 \partial_y^2 \varphi_2 + \dots \\
\partial_x \partial_y \Phi &= \epsilon \partial_x \partial_y \varphi_1 + \epsilon^2 \partial_x \partial_y \varphi_2 + \dots .
\end{aligned}
$$

Um uns die Arbeit ein wenig zu erleichtern, setzen wir diese Terme nicht direkt in (1.1.1) ein, sondern multiplizieren (1.1.1) vorher mit Ma_∞^2. Das ist nicht notwendig, sorgt aber für das Verschwinden des Quotienten $1/\mathrm{Ma}_\infty^2$. Wir betrachten also an Stelle von (1.1.1) die Gleichung

$$
\begin{aligned}
\left(\mathrm{Ma}_\infty^2 c^2 - \mathrm{Ma}_\infty^2 (\partial_x \Phi)^2\right) \partial_x^2 \Phi - 2\, \mathrm{Ma}_\infty^2\, \partial_x \Phi \cdot \partial_y \Phi \cdot \partial_x \partial_y \Phi& \\
+ \left(\mathrm{Ma}_\infty^2 c^2 - \mathrm{Ma}_\infty^2 (\partial_y \Phi)^2\right) \partial_y^2 \Phi = 0.& \qquad (1.1.4)
\end{aligned}
$$

Den Term $\mathrm{Ma}_\infty^2 c^2$ können wir über Gleichung (1.1.2) sofort ausdrücken durch

$$
\mathrm{Ma}_\infty^2 c^2 = 1 + \mathrm{Ma}_\infty^2 \frac{\kappa - 1}{2} \left(1 - (\partial_x \Phi)^2 - (\partial_y \Phi)^2\right).
$$

Nun gilt nach unserer Vorarbeit aber

$$
\begin{aligned}
(\partial_x \Phi)^2 &= \left(1 + \epsilon \partial_x \varphi_1 + \epsilon^2 \partial_x \varphi_2 + \dots\right) \cdot \left(1 + \epsilon \partial_x \varphi_1 + \epsilon^2 \partial_x \varphi_2 + \dots\right) \\
&= 1 + \epsilon \partial_x \varphi_1 + \epsilon^2 \partial_x \varphi_2 + \dots + \epsilon \partial_x \varphi_1 + \epsilon^2 (\partial_x \varphi_1)^2 + \dots \\
&\quad + \epsilon^2 \partial_x \varphi_2 + \dots \\
&= 1 + 2\epsilon \partial_x \varphi_1 + \epsilon^2 \left(2 \partial_x \varphi_2 + (\partial_x \varphi_1)^2\right) + \dots
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
(\partial_y \Phi)^2 &= \left(\epsilon \partial_y \varphi_1 + \epsilon^2 \partial_y \varphi_2 + \dots\right) \cdot \left(\epsilon \partial_y \varphi_1 + \epsilon^2 \partial_y \varphi_2 + \dots\right) \\
&= \epsilon^2 (\partial_y \varphi_1)^2 + \dots ,
\end{aligned}
$$

[5] Das ist hier glücklicherweise nicht der Fall! In den Fällen, in denen man einen falschen Ansatz gewählt hat, liefert die nachfolgende asymptotische Analysis ganz sicher ein unsinniges Ergebnis, so daß man im Nachhinein mitbekommt, daß der Ansatz falsch war.

und damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathrm{Ma}_\infty^2\, c^2 &= 1 + \mathrm{Ma}_\infty^2 \frac{\kappa-1}{2}\Big(-2\epsilon\partial_x\varphi_1 \\ &\quad -\epsilon^2\left(2\partial_x\varphi_2 + (\partial_x\varphi_1)^2 + (\partial_y\varphi_1)^2\right) + \ldots\Big)\,.\end{aligned}$$

Jetzt ersetzen wir sukzessive die Terme in (1.1.4) durch die entsprechenden asymptotischen Entwicklungen. So erhalten wir

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{Ma}_\infty^2\, c^2 - \mathrm{Ma}_\infty^2(\partial_x\Phi)^2\right) &= 1 - \epsilon\,\mathrm{Ma}_\infty^2(\kappa-1)\partial_x\varphi_1 - \ldots \\ &\quad - \mathrm{Ma}_\infty^2 - 2\epsilon\,\mathrm{Ma}_\infty^2\,\partial_x\varphi_1 - \ldots \\ &= 1 - \mathrm{Ma}_\infty^2 - \epsilon\,\mathrm{Ma}_\infty^2(\kappa+1)\partial_x\varphi_1 - \ldots\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{Ma}_\infty^2\, c^2 - \mathrm{Ma}_\infty^2(\partial_x\Phi)^2\right)\partial_x^2\Phi &= \left(1 - \mathrm{Ma}_\infty^2 - \epsilon\,\mathrm{Ma}_\infty^2(\kappa+1)\partial_x\varphi_1 - \ldots\right) \\ &\quad \cdot\left(\epsilon\partial_x^2\varphi_1 + \epsilon^2\partial_x^2\varphi_1 + \ldots\right).\end{aligned}$$

Ganz analog berechnet man

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{Ma}_\infty^2\, c^2 - \mathrm{Ma}_\infty^2(\partial_y\Phi)^2\right) &= 1 - \epsilon\,\mathrm{Ma}_\infty^2(\kappa-1)\partial_x\varphi_1 - \ldots \\ &\quad -\epsilon^2\,\mathrm{Ma}_\infty^2(\partial_y\varphi_1)^2 - \ldots\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{Ma}_\infty^2\, c^2 - \mathrm{Ma}_\infty^2(\partial_y\Phi)^2\right)\partial_y^2\Phi &= \left(1 - \epsilon\,\mathrm{Ma}_\infty^2(\kappa-1)\partial_x\varphi_1 - \ldots\right) \\ &\quad \left(\epsilon\partial_y^2\varphi_1 + \epsilon^2\partial_y^2\varphi_2 + \ldots\right).\end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}2\,\mathrm{Ma}_\infty^2\,\partial_x\Phi\cdot\partial_y\Phi\cdot\partial_x\partial_y\Phi &= 2\,\mathrm{Ma}_\infty^2\left(1 + \epsilon\partial_x\varphi_1 + \epsilon^2\partial_x\varphi_2 + \ldots\right) \\ &\quad \cdot\left(\epsilon\partial_y\varphi_1 + \epsilon^2\partial_y\varphi_2 + \ldots\right)\cdot\partial_x\partial_y\Phi \\ &= 2\,\mathrm{Ma}_\infty^2(\epsilon\partial_y\varphi_1 + \ldots)\cdot\partial_x\partial_y\Phi \\ &= 2\,\mathrm{Ma}_\infty^2(\epsilon\partial_y\varphi_1 + \ldots) \\ &\quad \cdot\left(\epsilon\partial_x\partial_y\varphi_1 + \epsilon^2\partial_x\partial_y\varphi_2 + \ldots\right).\end{aligned}$$

Damit haben wir schließlich insgesamt aus (1.1.4)

$$\begin{aligned}&\left(1 - \mathrm{Ma}_\infty^2 - \epsilon\,\mathrm{Ma}_\infty^2(\kappa+1)\partial_x\varphi_1 - \ldots\right)\cdot\left(\epsilon\partial_x^2\varphi_1 + \epsilon^2\partial_x^2\varphi_1 + \ldots\right) \\ &\qquad -2\,\mathrm{Ma}_\infty^2\cdot\left(\epsilon^2\partial_y\varphi_1\cdot\partial_x\partial_y\varphi_1 + \ldots\right) \\ &+ \left(1 - \epsilon\,\mathrm{Ma}_\infty^2(\kappa-1)\partial_x\varphi_1 - \ldots\right)\cdot\left(\epsilon\partial_y^2\varphi_1 + \epsilon^2\partial_y^2\varphi_2 + \ldots\right) = 0 \qquad (1.1.5)\end{aligned}$$

erhalten. Das sieht offenbar noch unübersichtlicher aus als die Ausgangsgleichung! Jetzt greift aber ein **fundamentales Prinzip** der asymptotischen Analysis:

Satz 1.1.
Gilt mit beliebigen Termen $A_i, i = 1, 2, \ldots$ eine Gleichung der Form

$$\sum_{i=1}^{M} \epsilon^i A_i = 0$$

für alle $\epsilon > 0$ und $M \in \mathbb{N}$ oder $M = \infty$, dann gilt

$$A_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, M.$$

Beweis:
Der Beweis dieses Prinzips ist ganz einfach. Wir führen ihn für $M = 2$, da dann der Beweis für alle endlichen M klar ist. Der Fall $M = \infty$ ergibt sich aus einer vollständigen Induktion. Für alle $\epsilon > 0$ gelte die Gleichung $\epsilon A + \epsilon^2 B = 0$, wobei A und B beliebige Ausdrücke sein können. Wir machen die Annahme, daß A und B nicht verschwinden, also $A \neq 0$, $B \neq 0$. Dann folgt aber $A = -\epsilon B$ für alle $\epsilon > 0$, also für $\epsilon = 1$ gilt $A = -B$ und für $\epsilon = 2$ entsprechend $A = -2B$. Die Differenz ergibt aber $0 = -B$ im Widerspruch zur Annahme. Also müssen A und B verschwinden. □

Bemerkung: Alle Betrachtungen bleiben richtig für $\sum\limits_{i=0}^{M} \epsilon^i A_i = 0$.

Die mit ϵ multiplizierten Terme in (1.1.5) ergeben damit gerade

$$\epsilon \partial_x^2 \varphi_1 - \epsilon \operatorname{Ma}_\infty^2 \partial_x^2 \varphi_1 + \epsilon \partial_y^2 \varphi_1 = 0,$$

also

$$(1 - \operatorname{Ma}_\infty^2) \partial_x^2 \varphi_1 + \partial_y^2 \varphi_1 = 0. \tag{1.1.6}$$

Für die mit ϵ^2 versehenen Terme folgt

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \partial_x^2 \varphi_1 - \epsilon^2 \operatorname{Ma}_\infty^2 \partial_x^2 \varphi_1 - \epsilon^2 \operatorname{Ma}_\infty^2 (\kappa + 1) \partial_x \varphi_1 \cdot \partial_x^2 \varphi_1 \\ -2 \operatorname{Ma}_\infty \epsilon^2 \partial_y \varphi_1 \cdot \partial_x \partial_y \varphi_1 + \epsilon^2 \partial_y^2 \varphi_2 - \epsilon^2 \operatorname{Ma}_\infty^2 (\kappa - 1) \partial_x \varphi_1 \cdot \partial_y^2 \varphi_1 = 0, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} (1 - \operatorname{Ma}_\infty^2) \partial_x^2 \varphi_1 + \partial_y^2 \varphi_2 &= \operatorname{Ma}_\infty^2 \big((\kappa + 1) \partial_x \varphi_1 \cdot \partial_x^2 \varphi_1 + 2 \partial_y \varphi_1 \cdot \partial_x \partial_y \varphi_1 \\ &\quad (\kappa - 1) \partial_x \varphi_1 \cdot \partial_y^2 \varphi_1 \big). \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

Die Gleichung (1.1.6) für das Störpotential erster Ordnung φ_1 ist **linear** mit **konstanten Koeffizienten**. Auch Gleichung (1.1.7 für das Störpotential zweiter Ordnung φ_2 ist linear, dafür tritt φ_1 auf der rechten Seite auf.

Im allgemeinen gilt, daß die Asymptotik auf einfachere Gleichungen führt, die aber in Hierarchien auftreten.

Da wir mit einer Randwertaufgabe gestartet sind, reicht eine Asymptotik der Differentialgleichung alleine nicht aus. Auch die Randbedingungen für (1.1.1) müssen nach ϵ

entwickelt werden. Diejenige Randbedingung, in der ϵ vorkommt, ist die Körperrandbedingung

$$\partial_y \Phi(x, \epsilon h(x)) = \epsilon h'(x) \partial_x \Phi(x, \epsilon h(x)).$$

Würde man den Ansatz $\Phi(x, y; \epsilon) = x + \epsilon\varphi_1(x, y) + \epsilon^2\varphi_2(x, y) + \ldots$ in die Randbedingung einsetzen, stört die Tatsache, das ϵ bereits in der y-Variablen auftaucht. Hier hilft man sich mit einer Taylor-Entwicklung, denn für $\epsilon \ll 1$ ist $\epsilon h(x)$ stets klein. Bezeichnet man mit 0^+ den Limes in der y-Koordinate von oben (d.h. von positiven y-Werten aus), dann liefert Taylor

$$\partial_y \Phi(x, \epsilon h(x)) = \partial_y \Phi(x, 0^+) + \epsilon h(x) \partial_y^2 \Phi(x, 0^+) + \ldots .$$

Nun verwenden wir die asymptotischen Entwicklungen

$$\partial_y \Phi(x, 0^+) = \epsilon \partial_y \varphi_1(x, 0^+) + \epsilon^2 \partial_y \varphi_2(x, 0^+) + \ldots$$

und

$$\partial_y^2 \Phi_1(x, 0^+) = \epsilon \partial_y^2 \varphi_1(x, 0^+) + \epsilon^2 \partial_y^2 \varphi_2(x, 0^+) + \ldots ,$$

und erhalten damit

$$\partial_y \Phi(x, \epsilon h(x)) = \epsilon \partial_y \varphi_1(x, 0^+) + \epsilon^2 \partial_y \varphi_2(x, 0^+) + \ldots + \epsilon^2 h(x) \partial_y^2 \varphi_1(x, 0^+) + \ldots .$$

Analog ergibt eine Taylor-Entwicklung für $\partial_x \Phi(x, \epsilon h(x))$

$$\partial_x \Phi(x, \epsilon h(x)) = \partial_x \Phi(x, 0^+) + \epsilon h(x) \partial_x^2 \Phi(x, 0^+) + \ldots$$

und Einsetzen der asymptotischen Entwicklungen

$$\partial_x \Phi(x, 0^+) = 1 + \epsilon \partial_x \varphi_1(x, 0^+) + \epsilon^2 \partial_x \varphi_2(x, 0^+) + \ldots$$

und

$$\partial_x^2 \Phi(x, 0^+) = \epsilon \partial_x^2 \varphi_1(x, 0^+) + \epsilon^2 \partial_x^2 \varphi_2(x, 0^+) + \ldots$$

liefert

$$\begin{aligned} \partial_x \Phi(x, \epsilon h(x)) &= 1 + \epsilon \partial_x \varphi_1(x, 0^+) + \epsilon^2 \partial_x \varphi_2(x, 0^+) + \ldots \\ &\quad + \epsilon^2 h(x) \partial_x^2 \varphi_1(x, 0^+) + \ldots . \end{aligned}$$

Damit lautet die Körperrandbedingung

$$\begin{aligned} &\epsilon \partial_y \varphi_1(x, 0^+) + \epsilon^2 \partial_y \varphi_2(x, 0^+) + \epsilon^2 h(x) \partial_y^2 \varphi_1(x, 0^+) + \ldots \\ &\qquad = \epsilon h'(x) + \epsilon^2 h'(x) \partial_x \varphi_1(x, 0^+) + \ldots \ . \end{aligned}$$

Da diese Entwicklung wieder für alle (kleinen) $\epsilon > 0$ gelten soll, müssen wieder alle Terme mit ϵ, mit ϵ^2, usw., separat verschwinden. Für die Potenz ϵ erhalten wir damit

$$\partial_y \varphi_1(x, 0^+) = h'(x)$$

und für ϵ^2 ergibt sich

$$\partial_y \varphi_2(x, 0^+) = h'(x) \partial_x \varphi_1(x, 0^+) - h(x) \partial_y^2 \varphi_1(x, 0^+).$$

Im Gegensatz zu den Körperrandbedingungen für (1.1.1) müssen in den linearisierten Gleichungen Randbedingungen **auf der Symmetrieebene** $y = 0$ erfüllt sein! Man spricht auch von „projezierten Randbedingungen“. Aber Achtung: Um die Taylor-Entwicklung überhaupt durchführen zu können, muß das Potential Φ hinreichend of differenzierbar sein.

2 Ordnungssymbole

Im folgenden sei

$$\begin{aligned} I &:= (0,\epsilon_1], \quad \epsilon_1 > 0 \\ D &\subset \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

sowie u eine skalare reellwertige Funktion

$$\begin{aligned} u \,:\, D \times I &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1,\ldots,x_n;\epsilon) &\overset{u}{\mapsto} u(x_1,\ldots,x_n;\epsilon). \end{aligned}$$

Zudem schreiben wir $\underline{x} := (x_1,\ldots,x_n)^T$.

2.1 Ordnungssymbol „Groß O“

Definition 2.1.
Sei $v \,:\, D \times I \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, dann gilt

a)
$$u(\underline{x};\epsilon) \;=\; O(v(\underline{x};\epsilon)) \quad \text{in } I, \tag{2.1.1}$$
falls für jedes $\underline{x} \in D$ ein $k(\underline{x}) \in \mathbb{R}_0^+$ existiert mit
$$|u(\underline{x};\epsilon)| \;\leq\; k(\underline{x}) \cdot |v(\underline{x};\epsilon)| \qquad \forall\, \epsilon \in I.$$

b)
$$u(\underline{x};\epsilon) \;=\; O(v(\underline{x};\epsilon)) \quad \text{für} \quad \epsilon \rightarrow 0, \tag{2.1.2}$$
falls für jedes $\underline{x} \in D$ ein $k(\underline{x}) \in \mathbb{R}_0^+$ und eine Umgebung $U_{\delta(\underline{x})}(0)$ existiert, so daß $u(\underline{x};\epsilon) = O(v(\underline{x};\epsilon))\ \forall\, \epsilon \in I \cap U_{\delta(\underline{x})}(0)$ gilt.

c)
$$u(\underline{x};\epsilon) \;=\; O(v(\underline{x};\epsilon)) \quad \text{in } I, \text{ gleichmäßig in } D, \tag{2.1.3}$$
falls (2.1.1) mit $k(\underline{x}) = \text{const}$ gilt.

d)
$$u(\underline{x};\epsilon) \;=\; O(v(\underline{x};\epsilon)) \quad \text{für} \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad \text{gleichmäßig in } D, \tag{2.1.4}$$
falls (2.1.2) mit $k(\underline{x}) = \text{const}$ gilt und die Umgebung $U_{\delta(\underline{x})}(0)$ unabhängig von $\underline{x}$ ist.

Bemerkung 2.2.
$u(\underline{x};\epsilon) = O(v(\underline{x};\epsilon))$ impliziert, daß die Funktion $g(\underline{x};\epsilon) := \left|\dfrac{u(\underline{x};\epsilon)}{v(\underline{x};\epsilon)}\right|$ im Falle ihrer Existenz nach oben durch $k(\underline{x})$ beschränkt ist.

Beispiel 2.3.

$$\begin{aligned} D &= (0,1), \qquad I \;=\; (0,\epsilon_1] \subset (0,1) \\ u(x;\epsilon) &= x + \epsilon \end{aligned}$$

Dann gilt

$$u(x;\epsilon) \;=\; O(1) \quad \text{in } I, \quad \text{gleichmäßig in } D,$$

denn

$$|x+\epsilon| \;\leq\; 2 \;=\; k \qquad \forall\, \epsilon \in I \qquad \forall\, x \in D$$

Beispiel 2.4.

$$D \;=\; (0,1), \qquad I \;=\; (0,\epsilon_1] \;\subset\; (0,1)$$
$$u(x;\epsilon) \;=\; e^{-\sin \epsilon\, x}$$

Dann gilt

$$u(x;\epsilon) \;=\; O\left(e^{-2\epsilon\, x/\pi}\right) \quad \text{in } I, \quad \text{gleichmäßig in } D,$$

denn für $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ gilt

$$0 \;<\; 2y/\pi \;<\; \sin y \;<\; 1$$
$$\Rightarrow \quad e^{-\sin \epsilon\, x} \;\leq\; \underbrace{1}_{=k(x)} \cdot e^{-2\epsilon\, x/\pi} \quad \text{für} \quad \epsilon\, x \in (0,1)$$

Beispiel 2.5.

$$D \;=\; (0,1), \qquad I \;=\; (0,\epsilon_1] \;\subset\; (0,1)$$
$$u(x;\epsilon) \;=\; \frac{1}{x+\epsilon}$$

Dann gilt

$$u(x;\epsilon) \;=\; O(1) \quad \text{in} \quad I,$$

denn

$$|u(x;\epsilon)| \;<\; \underbrace{\frac{1}{x}}_{k(x)} \cdot 1 \qquad \forall\, \epsilon \in I \quad \forall\, x \in D$$

Bemerkung 2.6.
Die Entwicklung ist nicht gleichmäßig gültig,

$$\lim_{(x;\epsilon)\to(0,0)} u(x;\epsilon) \;=\; \infty \qquad \left(\text{und mit } \lim_{x\to 0} k(x) = \infty\right).$$

Wählt man $D = [\delta, 1)$ mit $1 > \delta > 0$, so erhalten wir die gleichmäßige Gültigkeit mit $k(x) = \frac{1}{\delta}$.

Beispiel 2.7.

$$D \;=\; (0,1), \qquad I \;=\; (0,\epsilon_1] \;\subset\; (0,1)$$
$$u(x;\epsilon) \;=\; \frac{\epsilon}{x(1-x)}$$

Dann gilt

$$u(x;\epsilon) \;=\; O(\epsilon) \quad \text{in } I$$

Bemerkung 2.8.
Nicht gleichmäßig, da $k(x) = \frac{1}{x(1-x)}$ in $(0,1)$ nicht beschränkt ist. Jedoch gleichmäßig in $\overline{D} = [\delta_1, \delta_2]$ mit $0 < \delta_1 < \delta_2 < 1$ und

$$k(x) \;=\; \max\left(\frac{1}{\delta_1(1-\delta_1)},\, \frac{1}{\delta_2(1-\delta_2)}\right).$$

Beispiel 2.9.

$$D \;=\; (0,1), \qquad I \;=\; (0,\epsilon_1] \;\subset\; (0,1)$$
$$u(x;\epsilon) \;=\; \sin\frac{x}{\epsilon}$$

Dann gilt

$$u(x;\epsilon) \;=\; O(x) \qquad \epsilon \;\to\; 0,$$

denn

$$\left|\sin\frac{x}{\epsilon}\right| \;\le\; 1 \;=\; \underbrace{\frac{1}{x}}_{k(x)} \cdot x.$$

Bemerkung 2.10.
$u(x;\epsilon) = O(1)$ $\epsilon \to 0$ gleichmäßig in D (mit $k = 1$).

Beispiel 2.11.

$$D \;=\; \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \qquad I \;=\; (0,\epsilon_1] \;\subset\; (0,1)$$

$$u(\underline{x};\epsilon) \;=\; x_1\,\epsilon^{\alpha} \tag{2.1.5}$$
$$v(\underline{x};\epsilon) \;=\; x_2\,\epsilon^{\beta} \tag{2.1.6}$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konstant und $\alpha \ge \beta$, dann gilt

$$u(\underline{x};\epsilon) \;=\; O(v(\underline{x};\epsilon)) \quad \text{in } I,$$

denn mit $\epsilon^{\alpha} \le \epsilon^{\beta}$ folgt

$$|u(\underline{x};\epsilon)| \;=\; x_1\epsilon^{\alpha} \;\le\; \underbrace{\frac{x_1}{x_2}}_{=:\,k(\underline{x})}\; x_2\,\epsilon^{\beta}.$$

Bemerkung 2.12.
Nicht gleichmäßig, da $k(\underline{x})$ unbeschränkt in D ist. Gleichmäßig für

$$\overline{D} \;=\; \left\{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 < x_1 < X_1 < \infty,\; 0 < X_2 < x_2 < \infty\right\}$$

mit $k = \frac{X_1}{X_2} = \text{const}$.

Das Symbol O liefert lediglich eine einseitige Schranke. Für zwei Funktionen u und v mit $u = O(v)$ folgt nicht, daß u und v von der gleichen Größenordnung sind. Für die

Funktionen (2.1.5) und (2.1.6) mit $\alpha > \beta$ existiert zu jedem $\underline{x} \in D$ stets ein $\epsilon_2 > 0$, so daß

$$u(\underline{x};\epsilon) \; < \; v(\underline{x};\epsilon)$$

für alle $\epsilon \in I \cap (0, \epsilon_2)$ gilt. Es gilt sogar

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{u(\underline{x};\epsilon)}{v(\underline{x};\epsilon)} \;=\; \lim_{\epsilon\to 0} \left(\frac{x_1}{x_2}\, \epsilon^{\alpha-\beta} \right) \;=\; 0 \qquad \forall\, \underline{x} \in D.$$

Sei $v(x;\epsilon) = 1$ definiert und $u(x;\epsilon) = x + \epsilon$ so gilt bei D und I aus Beispiel 2.3 neben

$$u(x;\epsilon) \;=\; O(v(x;\epsilon)) \quad \text{in } I \quad (\text{gleichmäßig in } D\,,\; k = 2\,)$$

auch

$$v(x;\epsilon) \;=\; O(u(x;\epsilon)) \quad \text{in } I \quad (\text{nicht gleichmäßig in } D\,,\; k(x) = \tfrac{1}{2x}\,).$$

Um diesen Fall zu klassifizieren betrachten wir die folgende Definition.

Definition 2.13.
Seien $u, v : D \times I \to \mathbb{R}$ gegeben, dann gilt

$$u \;=\; O_S(v) \quad \text{in} \quad I,$$

falls $u = O(v)$ und $v = O(u)$ in I erfüllt sind.

Satz 2.14.
Seien $u, v : D \times I \to \mathbb{R}$ mit $u = O_S(v)$ gegeben, dann gilt für alle $\underline{x} \in D$ mit $v(\underline{x};\epsilon) \neq 0 \;\forall\, \epsilon \in I$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{u(\underline{x};\epsilon)}{v(\underline{x};\epsilon)} \;\neq\; 0$$

und entsprechend für alle $\underline{x} \in D$ mit $u(\underline{x};\epsilon) \neq 0 \;\forall\, \epsilon \in I$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{v(\underline{x};\epsilon)}{u(\underline{x};\epsilon)} \;\neq\; 0.$$

Beweis:
Annahme:

$$u \;=\; O_S(v) \tag{2.1.7}$$

und $\exists\, \underline{x}^* \in D$ mit

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{v(\underline{x}^*;\epsilon)}{u(\underline{x}^*;\epsilon)} \;=\; 0 \tag{2.1.8}$$

und $u(\underline{x}^*;\epsilon) \neq 0\,,\; \forall\, \epsilon \in I\,.$

Aus (2.1.7) folgt, daß eine Funktion $k : D \to \mathbb{R}^+$ existiert mit

$$\begin{aligned}
& |u(\underline{x};\epsilon)| && \le\; k(\underline{x})\, |v(\underline{x};\epsilon)| \\
\Rightarrow\quad & |u(\underline{x}^*;\epsilon)| && \le\; k(\underline{x}^*)\, |v(\underline{x}^*;\epsilon)| \\
\Rightarrow\quad & \lim_{\epsilon\to 0} \frac{|v(\underline{x}^*;\epsilon)|}{|u(\underline{x}^*;\epsilon)|} && \ge\; \lim_{\epsilon\to 0} \frac{|v(\underline{x}^*;\epsilon)|}{k(\underline{x}^*)|v(\underline{x}^*;\epsilon)|} \\
& = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{k(\underline{x}^*)} && =\; \frac{1}{k(\underline{x}^*)} \;>\; 0.
\end{aligned}$$

Widerspruch zur Annahme (2.1.8). □

Die aufgeführten Definitionen 2.1 a) bis d) weisen einen sehr technischen Charakter auf. In praktischen Anwendungen ist es daher oftmals sinnvoll eine Ordnungsabschätzung

$$u(x) \;=\; O(v(x)) \quad \text{für} \quad x \to x_0,$$

mittels

$$\lim_{x\to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = const$$

nachzuweisen. Hierdurch erkennt man zum Beispiel direkt, daß für die Taylorentwicklung einer in x_0 beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion f

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + O\left((x-x_0)^{n+1}\right)$$

gilt.

Beispiel 2.15.
Taylorentwicklung der Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x$$

um den Nullpunkt. Wegen $f'(x) = f(x)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O\left(x^4\right), \quad x \to 0, \end{aligned}$$

denn

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sum_{k=4}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{4!} + \sum_{k=5}^{\infty} \frac{x^{k-4}}{k!} \right) = \frac{1}{4!}.$$

Bemerkung 2.16.
Wegen

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{\sum_{k=4}^{\infty} \frac{x^k}{k!}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{4!} + \sum_{k=5}^{\infty} \frac{x^{k-4}}{k!}} = 4!$$

gilt sogar

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O_S\left(x^4\right).$$

2.2 Ordnungssymbol „klein o“

Definition 2.17.
Sei $v : D \times I \to \mathbb{R}$ gegeben, dann gilt

a)
$$u(\underline{x};\epsilon) \;=\; o(v(\underline{x};\epsilon)) \quad \text{für} \quad \epsilon \to 0, \tag{2.2.1}$$

falls für jedes $\underline{x} \in D$ und $\delta > 0$ ein Intervall $I(\underline{x};\delta) = (0, \epsilon_1(\underline{x};\delta)]$ existiert, so daß
$$|u(\underline{x};\epsilon)| \;\leq\; \delta\,|v(\underline{x};\epsilon)| \quad \forall\, \epsilon \in I(\underline{x};\delta) \tag{2.2.2}$$

gilt.

b)
$$u(\underline{x};\epsilon) \;=\; o(v(\underline{x};\epsilon)) \quad \text{für} \quad \epsilon \to 0, \quad \text{gleichmäßig in } D\,, \tag{2.2.3}$$

falls (2.2.1) mit $I(\underline{x};\delta) = I(\delta)$ gilt.

Oftmals wird auch $u \ll v$ anstatt (2.2.1) verwendet. Die Gleichung (2.2.2) induziert direkt, daß u im Vergleich zu v beliebig klein wird, wenn wir ϵ gegen Null gehen lassen.

Beispiel 2.18.
Wir betrachten D, I, u und v aus Beispiel 2.11. Zudem sei $\alpha > \beta$. Für ein beliebiges $\delta > 0$ definieren wir
$$\epsilon_1(\underline{x};\delta) \;=\; \left(\frac{\delta \cdot x_2}{x_1}\right)^{1/\alpha-\beta}$$

und erhalten damit
$$\begin{aligned}
& \delta \cdot |v(\underline{x};\epsilon)| \\
=\;& \delta \cdot x_2 \cdot \epsilon^{\beta} \\
=\;& x_1 \cdot \epsilon^{\alpha} \cdot \delta \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \epsilon^{\beta-\alpha} \\
\geq\;& x_1 \cdot \epsilon^{\alpha} \cdot \underbrace{\delta \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \left(\frac{\delta\, x_2}{x_1}\right)^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha-\beta}}}_{=\,1} \\
=\;& |u(\underline{x};\epsilon)| \qquad \forall\, \epsilon \in I(\underline{x};\delta) \;=\; (0, \epsilon_1(\underline{x};\delta)],
\end{aligned}$$

wodurch
$$u(\underline{x};\epsilon) \;=\; o(v(\underline{x};\epsilon)) \quad \text{für} \quad \epsilon \to 0 \tag{2.2.4}$$

folgt. Die Aussage ist nicht gleichmäßig in D gültig, da $\epsilon_1(\underline{x};\delta) \to \infty$ für $x_1 \to \infty$ und für $x_2 \to 0$ gilt. Schränken wir wiederum D zu $\overline{D}$ ein (wie in Beispiel 2.11), dann erhalten wir $\epsilon_1(\underline{x};\delta) = \left(\frac{\delta\, X_2}{X_1}\right)^{1/\alpha-\beta}$ unabhängig von $\underline{x}$ und somit gleichmäßige Gültigkeit von (2.2.4) in $\overline{D}$.

Analog zum Ordnungssymbol O läßt sich in praktischen Anwendungen der Nachweis

$$u(x) \; = \; o(v(x)), \;\; x \to x_0$$

oftmals leichter mittels

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = 0$$

nachweisen. Für die Taylorentwicklung der Exponentialfunktion um den Nullpunkt erhalten wir

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sum\limits_{k=4}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}{x^{4-\epsilon}} = \lim_{x \to 0} x^{\epsilon} \left(\frac{1}{4!} + \sum_{k=5}^{\infty} \frac{x^{k-4}}{k!} \right) = 0 \;\; \forall \epsilon > 0$$

und somit

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^{4-\epsilon}\right) \;\; \forall \epsilon > 0.$$

Beispiel 2.19.
Sei $D = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \,|\, x_2 < x_1\}$, dann gilt

$$e^{(x_2 - x_1)/\epsilon} \; = \; o\left(\epsilon^{\beta}\right) \quad \text{für} \quad \epsilon \to o \tag{2.2.5}$$

mit beliebigem $\beta \in \mathbb{R}^+$. Da $x_2 - x_1 < 0$ gilt, benötigen wir nur den Nachweis

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{e^{-\alpha/\epsilon}}{\epsilon^{\beta}} \; = \; 0$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}^+$ und $\beta \in \mathbb{R}^+$. Nun gilt

$$\frac{e^{-\alpha/\epsilon}}{\epsilon^{\beta}} \; = \; \frac{e^{-\alpha/\epsilon}}{e^{\beta \log \epsilon}} \; = \; e^{-(\alpha + \beta\epsilon \log \epsilon)/\epsilon}$$

Mit l'Hospital folgt

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \epsilon \; = \; \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log \epsilon}{1/\epsilon} \; = \; \lim_{e \to 0} \frac{1/\epsilon}{-1/\epsilon^2} \; = \; \lim_{\epsilon \to 0} -\epsilon \; = \; 0$$

$$\Rightarrow \;\; \lim_{\epsilon \to 0} (\alpha + \beta\epsilon \log \epsilon) \; = \; \alpha \quad \Rightarrow \quad \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\alpha + \beta\epsilon \log \epsilon}{\epsilon} \quad \overset{\alpha \geq 0}{=} \quad \infty$$

$$\Rightarrow \;\; \lim_{\epsilon \to 0} e^{-\left(\frac{\alpha + \beta\epsilon \log \epsilon}{\epsilon}\right)} \; = \; 0.$$

Wiederum gilt die Gleichung (2.2.5) nur gleichmäßig, falls $\overline{D} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \,|\, x_1 \geq X_1;\; x_2 \leq x_1 - X_1,\; X_1 > 0\}$ betrachtet wird, denn nur dann ist α unabhängig von (x_1, x_2).

Definition 2.20.
Eine Funktion $f(\underline{x}; \epsilon)$ mit

$$f(\underline{x}; \epsilon) \; = \; o(\epsilon^{\beta}) \quad \text{für} \quad \epsilon \to 0 \qquad \forall\, \beta \in \mathbb{R}^+$$

heißt TST (transcendantal small term).

Rechenregeln:

a) $O(O(u)) = O(u)$

b) $O(o(u)) = o(O(u)) = o(u)$

c) $O(u) \cdot O(v) = O(u \cdot v)$

d) $O(u) \cdot o(v) = o(u) \cdot o(v) = o(u \cdot v)$

e) $O(u) + O(u) = O(u) + o(u) = O(u)$

f) $o(u) + o(u) = o(u)$

Beweis:
O.B.d.A. seien die betrachteten Funktionen nur von einer Veränderlichen abhängig.

zu a)

„ $\Rightarrow$ “

$g = O(O(u))$ heißt $\exists k_1, k_2 \geq 0$ mit $|g(x)| \leq k_1 \cdot k_2 \cdot |u(x)|$.

Mit $k = k_1 \cdot k_2$ folgt $|g(x)| \leq k \cdot |u(x)|$ und somit $g = O(u)$.

„ $\Leftarrow$ “

$g = O(u)$ heißt $\exists k \geq 0$ mit $|g(x)| \leq k \cdot |u(x)|$.

Mit $k_1 = k_2 = +\sqrt{k}$ folgt $|g(x)| \leq k_1 \cdot k_2 \cdot |u(x)|$ und somit $g = O(O(u))$.

zu b)

„ $\Rightarrow$ “

$g = O(o(u))$, $x \to 0$ heißt $\exists k > 0$ und zu jedem $\delta > 0$ ein Intervall $0 < x < x_1(\delta)$ mit $|g(x)| \leq k \cdot \delta \cdot |u(x)|$, $\forall x \in (0, x_1(\delta))$. Sei $\tilde{\delta} > 0$ gegeben, dann ergibt sich mit $\delta = \frac{\tilde{\delta}}{k}$ die Abschätzung $|g(x)| \leq k \cdot \delta \cdot |u(x)| = \tilde{\delta} \cdot |u(x)|$, $\forall x \in (0, x_1(k \cdot \delta)] = (0, x_1(\tilde{\delta})]$ und somit $g = o(u)$.

„ $\Leftarrow$ “

Folgt direkt mit $k = 1$.

Die weiteren Beweise verbleiben als Übung. □

Bemerkung 2.21.
Ein Gleichheitszeichen zwischen Ordnungssymbolen muß als Äquivalenz derart aufgefaßt werden, daß für zwei Ordnungsbegriffe A und B (zum Beispiel $A = O(u)$ und $B = O(O(u))$) genau dann

$$A = B$$

geschrieben werden darf, wenn für jede Funktion h

$$h = A \Longleftrightarrow h = B$$

gilt.

Beispiel 2.22.
Seien $g, u : I \to \mathbb{R}$ mit $g = o(u)$ für $x \to x_0$, dann gilt

$$o(u) = O(o(u)) \neq O(g) \text{für} x \to x_0.$$

Die Ungleichheit folgt aus der Tatsache, daß zwar für jede Funktion h die Implikation

$$h = O(g) \Rightarrow h = o(u)$$

jedoch **nicht** die Äquivalenz

$$h = O(g) \Leftrightarrow h = o(u)$$

gilt. Betrachten wir zum Beispiel die Funktionen

$$g(x) = x^2, u(x) = x$$

so gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{u(x)} = 0$$

und damit $g = o(u)$ für $x \to 0$. Für eine Funktion $h = O(g)$ für $x \to 0$ gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x^2} = \text{const} \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{u(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x} = 0 \;\Rightarrow\; h = o(u).$$

Jedoch ergibt sich für $h(x) = x^{3/2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{u(x)} = \lim_{x\to 0} x^{1/2} = 0 \;\Rightarrow\; h = o(u)$$

und

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} x^{-1/2} = \infty \;\Rightarrow\; h \neq O(g).$$

3 Asymptotische Folge und Asymptotische Entwicklung

In diesem Abschnitt beschreiben wir fundamentale Grundlagen asymptotischer Ein- und Mehrskalenentwicklungen und beweisen die im Rahmen der Mehrskalenanalyse der Euler-Gleichungen benötigten Eigenschaften.

Definition 3.1.
Eine Folge von Funktion $\{\phi_n(\epsilon)\}_{n=1}^{\infty}$ heißt asymptotische Folge, falls

$$\phi_{n+1}(\epsilon) \;=\; o(\phi_n(\epsilon)) \quad \text{für} \quad \epsilon \to 0 \tag{3.0.6}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispiel 3.2. a) $\phi_n(\epsilon) \;=\; \epsilon^{n-1}$

b) $\phi_1(\epsilon) \;=\; \log\epsilon,\;\; \phi_2(\epsilon) \;=\; 1,\;\; \phi_3(\epsilon) \;=\; \epsilon\log\epsilon,\;\; \phi_4(\epsilon) \;=\; \epsilon,\;\; \phi_5(\epsilon) \;=\; \epsilon^2\log^2\epsilon\,,$
$\phi_6(\epsilon) \;=\; \epsilon^2\log\epsilon,\;\; \phi_7(\epsilon) \;=\; \epsilon^2,\;\; \phi_8(\epsilon) \;=\; \epsilon^3\log^3\epsilon$

Für a) erfüllen wir die Bedingung (3.0.6) direkt mit

$$\epsilon_1(\underline{x};\delta) \;=\; \delta,$$

denn hiermit folgt

$$\delta|\phi_n(\epsilon)| \;=\; \delta\,\epsilon^n \;\geq\; \epsilon^{n+1} \;=\; |\phi_{n+1}(\epsilon)| \qquad \forall\,\epsilon \in (0, \epsilon_1(\underline{x};\delta)]$$

beziehungsweise

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\phi_{n+1}(\epsilon)}{\phi_n(\epsilon)} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon^{n+1}}{\epsilon^n} = \lim_{\epsilon\to 0}\epsilon = 0.$$

□

Für b) erhalten wir die Behauptung aus

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon^n\log^{(m-1)}\epsilon}{\epsilon^n\log^m\epsilon} \;=\; \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\log\epsilon} \;=\; 0$$

und

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon^m\cdot\log^m\epsilon}{\epsilon^{m-1}} \quad &= \quad \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\log^m\epsilon}{1/\epsilon} \quad &&= \quad \lim_{\epsilon\to 0}\frac{m\cdot\log^{(m-1)}\epsilon\cdot\left(\frac{1}{\epsilon}\right)}{-1/\epsilon^2}\\
= \;\lim_{\epsilon\to 0}\frac{-m\cdot\log^{(m-1)}\epsilon}{1/\epsilon} \quad &= \quad \lim_{\epsilon\to 0}\frac{(-1)^{m-1}m!\log\epsilon}{1/\epsilon} \quad &&= \quad \lim_{\epsilon\to 0}\frac{(-1)^m m!(1/\epsilon)}{1/\epsilon^2}\\
= \;0 &
\end{aligned}$$

□

Definition 3.3.
Sei $u : D \times I \to \mathbb{R},\;\; (\underline{x};\epsilon) \overset{u}{\mapsto} u(\underline{x};\epsilon)$ und $\{\phi_n(\epsilon)\}_{n=1}^{\infty}$ eine asymptotische Folge und $N \in \mathbb{N}$, dann heißt

$$\sum_{n=1}^{N}\phi_n(\epsilon)u_n(\underline{x}) \tag{3.0.7}$$

eine N-term asymptotische Entwicklung von u, falls

$$u(\underline{x};\epsilon) - \sum_{n=1}^{N} \phi_n(\epsilon)u_n(\underline{x}) \;=\; o(\phi_N(\epsilon)) \quad \text{für} \quad \epsilon \to 0 \tag{3.0.8}$$

gilt.

Die asymptotische Entwicklung heißt gleichmäßig gültig, falls (3.0.8) gleichmäßig in D gilt.

Bevor wir eine Entwicklung anhand einer konkreten Problemstellung durchführen, erweist es sich als sinnvoll, zunächst einige fundamentale Eigenschaften asymptotischer Entwicklungen zu studieren.

Satz 3.4.
Sei $\{\phi_n(\epsilon)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine asymptotische Folge und $u_n : D \to \mathbb{R},\; n = 1,\dots,N$ gegeben, so daß

$$\sum_{n=1}^{N} \phi_n(\epsilon)u_n(\underline{x}) \tag{3.0.9}$$

eine asymptotische N-term Entwicklung der Funktion $u : D \times I \to \mathbb{R}$ darstellt, dann gilt

$$u(\underline{x};\epsilon) - \sum_{n=1}^{k} \phi_n(\epsilon)u_n(\underline{x}) = o(\phi_k(\epsilon)),\; \epsilon \to 0$$

für $k = 1,\dots,N$ und

$$u(\underline{x};\epsilon) - \sum_{n=1}^{k} \phi_n(\epsilon)u_n(\underline{x}) = O(\phi_{k+1}(\epsilon)),\; \epsilon \to 0$$

für $k = 1,\dots,N-1$.

Beweis:
Da (3.0.9) eine asymptotische Entwicklung der Funktion u darstellt, gilt

$$u(\underline{x};\epsilon) - \sum_{n=1}^{N-1} \phi_n(\epsilon)u_n(\underline{x}) = \phi_N(\epsilon)u_N(\underline{x}) + o(\phi_N(\epsilon)) = O(\phi_N(\epsilon)),\; \epsilon \to 0.$$

Wegen $\phi_N(\epsilon) = o(\phi_{N-1}(\epsilon))\; \epsilon \to 0$ folgt

$$u(\underline{x};\epsilon) - \sum_{n=1}^{N-1} \phi_n(\epsilon)u_n(\underline{x}) = o(\phi_{N-1}(\epsilon)),\; \epsilon \to 0,$$

wodurch sich der Beweis direkt mittels einer sukzessiven Dekrementierung der Summationsgrenze ergibt. □

Stellt $\sum_{n=1}^{N} \phi_n(\epsilon)u_n(\underline{x})$ für alle $N \in \mathbb{N}$ eine asymptotische Entwicklung von u dar, so schreiben wir auch

$$u(\underline{x};\epsilon) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(\epsilon)u_n(\underline{x}),\; \epsilon \to 0.$$

Als direkte Folgerung des Satzes 3.4 erhalten wir das folgende Korollar.

Korollar 3.5.
Sei $\{\phi_n(\epsilon)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine asymptotische Folge und $u(\underline{x};\epsilon) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(\epsilon)u_n(\underline{x})$, $\epsilon \to 0$, dann gilt

$$u(\underline{x};\epsilon) - \sum_{n=1}^{N} \phi_n(\epsilon)u_n(\underline{x}) = O\left(\phi_{N+1}(\epsilon)\right),\ \epsilon \to 0$$

für alle $N \in \mathbb{N}$.

3.1 Asymptotische Entwicklung explizit gegebener Funktionen

Neben der zunächst willkürlich wählbaren asymptotischen Folge benötigen wir zur Bestimmung einer asymptotischen N-term Entwicklung eine Vorschrift zur Berechnung der Funktionen $u_n,\ n = 1,\dots,N$.

Satz 3.6.
Sei $u : D \times I \to \mathbb{R}$ gegeben und $\{\phi_n(\epsilon)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine asymptotische Folge, dann stellt die Summe

$$\sum_{n=1}^{N} \phi_n(\epsilon)u_n(\underline{x})$$

genau dann eine asymptotische N-term Entwicklung der Funktion u dar, wenn für alle $\underline{x} \in D$

$$u_n(\underline{x}) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{u(\underline{x};\epsilon) - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \phi_k(\epsilon)u_k(\underline{x})}{\phi_n(\epsilon)},\ n = 1,\dots,N \tag{3.1.1}$$

gilt.

Beweis:
Satz 3.4 besagt, daß eine asymptotische N-term Entwicklung stets auch die asymptotischen k-term Entwicklungen für $k < N$ beinhaltet. Daher muß der Beweis lediglich für $n = N$ durchgeführt werden. Hierfür erhalten wir die Äquivalenz unmittelbar aus der Gleichung

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{u(\underline{x};\epsilon) - \sum\limits_{n=1}^{N} \phi_n(\epsilon)u_n(\underline{x})}{\phi_N(\epsilon)}\right) = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{u(\underline{x};\epsilon) - \sum\limits_{n=1}^{N-1} \phi_n(\epsilon)u_n(\underline{x})}{\phi_N(\epsilon)}\right) - u_N(\underline{x}).$$

□

Beispiel 3.7.
$u(x;\epsilon) = (x+\epsilon)^{-1/2}$ mit der asymptotischen Folge $\{\phi_n(\epsilon)\}_{n=1}^{\infty} = \{\epsilon^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad u_1(x) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{(x+\epsilon)^{-1/2}}{\epsilon^0} = x^{-1/2} \\
u_2(x) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{(x+\epsilon)^{-1/2} - x^{-1/2}}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{-\frac{1}{2}\,(x+\epsilon)^{-3/2}}{1} = -\frac{1}{2}\,x^{-3/2} \\
u_3(x) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{(x+\epsilon)^{-1/2} - x^{-1/2} + \epsilon\cdot\frac{1}{2}\,x^{-3/2}}{\epsilon^2} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{-\frac{1}{2}\,(x+\epsilon)^{-3/2} + \frac{1}{2}\,x^{-3/2}}{2\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(x+\epsilon)^{-5/2}}{2} \\
&= (-1)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot x^{-5/2}
\end{aligned}$$

Induktionsannahme:

$$u_n(x) = (-1)^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{(n-1)!}\cdot x^{-\frac{2n-1}{2}}\cdot\prod_{k=1}^{n}|2k-3|$$

und für

$$h_n(x;\epsilon) := u(x;\epsilon) - \sum_{k=1}^{n}\epsilon^{k-1}u_k(x)$$

gilt

$$\lim_{\epsilon\to 0} h_n^{(i)}(x;\epsilon) = 0 \quad \text{für} \quad i = 0,\ldots,(n-1),$$

wobei h_n die i-te Ableitung nach ϵ repräsentiert.

Induktionsvoraussetzung: Behauptung ist für $n = 1,2,3$ erfüllt.

Induktionsschritt: $d \to d+1$

$$\begin{aligned}
u_{d+1}(x) &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{u(x;\epsilon) - \sum\limits_{k=1}^{d}\epsilon^{k-1}\cdot u_k(x)}{\epsilon^d} \\
&\overset{d\text{-mal l'Hospital}}{=} \lim_{\epsilon\to 0}\frac{u^{(d)}(x;\epsilon)}{d!} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{(-1)^d\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^d\cdot(x+\epsilon)^{-1/2-d}\cdot\prod\limits_{k=1}^{d}|2k-1|}{d!} \\
&= (-1)^d\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^d\cdot\frac{1}{d!}\cdot x^{-\frac{2d+1}{2}}\cdot\prod_{k=1}^{d+1}|2k-3|.
\end{aligned}$$

Zudem gilt

$$\lim_{\epsilon\to 0} h_{d+1}^{(i)}(x;\epsilon) \;=\; 0 \quad \text{für} \quad i=0,\ldots,d-1$$

direkt aufgrund der Induktionsvoraussetzung und

$$\lim_{\epsilon\to 0} \left(\epsilon^d \cdot u_{d+1}(x)\right)^{(i)} \;=\; 0 \quad \text{für} \quad i=0,\ldots,d-1\,.$$

Wegen

$$u_{d+1}(x) \;=\; \frac{1}{d!}\cdot u^{(d)}(x;0) \tag{3.1.2}$$

gilt auch

$$\lim_{\epsilon\to 0} h_{d+1}^{(d)}(x;\epsilon) \;=\; 0$$

□

Aus (3.1.2) sehen wir zudem direkt, daß die asymptotische Entwicklung

$$u(x;\epsilon) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^{n-1}\cdot u_n(x) \tag{3.1.3}$$

äquivalent zur Taylorentwicklung von $u(x;\epsilon)$ um $\epsilon = 0$ ist. Für $\epsilon < |x|$ gilt zudem $|\epsilon^{n-1}/x^{(2n-1)/2}| < |1/\epsilon|$ und wir haben somit eine konvergente Reihe für $\epsilon < |x|$ vorliegen. (3.1.3) ist nicht gleichmäßig konvergent für jedes Intervall I mit $0 \in \overline{I}$.

Durch eine unterschiedliche Vorgehensweise bei der Definition der asymptotischen Entwicklung einer gegebenen Funktion kann sich auch ein unterschiedlicher Gültigkeitsbereich der Approximation ergeben. Zur Verdeutlichung betrachten wir im folgenden zwei asymptotische Entwicklungen der Funktion

$$\begin{aligned} f(x;\epsilon) \;&=\; e^{-x/\epsilon} - \frac{\epsilon\, e^{-x}}{x+\epsilon} \\ \text{für} \quad 0 \;\le\; x \;&\le\; 1, \quad 0 \;<\; \epsilon \ll 1 \end{aligned}$$

auf der Basis der asymptotischen Folge

$$\phi_n(\epsilon) \;=\; \epsilon^{n-1} \qquad n=1,\ldots$$

Analog zum Beispiel 3.7 ergibt sich mit (3.1.1) für festes $x \neq 0$ die asymptotische Entwicklung

$$\begin{aligned} g(x;\epsilon) \;&=\; -\epsilon\,\frac{e^{-x}}{x} + \epsilon^2\,\frac{e^{-x}}{x^2} - \epsilon^3\,\frac{e^{-x}}{x^3} + O(\epsilon^4) \\ &=\; \sum_{n=1}^{N} \epsilon^n h_n(x) + O(\epsilon^{N+1}) \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

mit $h_n(x) = (-1)^n\,\frac{e^{-x}}{x^n}$. Die Entwicklung ist dabei nicht gleichmäßig gültig in $D = [0,1]$, denn für $x=0$ verschwindet die Funktion f wogegen die asymptotische Entwicklung dort singulär ist. Für $\epsilon = 0.1$ und $N=3$ ergibt sich:

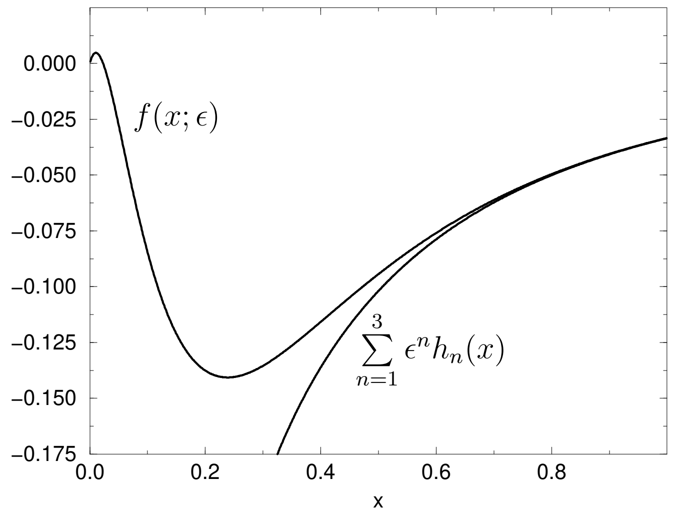


Abbildung 3.1: Exakte Lösung und äußere Entwicklung

Der große Fehler in der Umgebung des Ursprungs rührt von der Tatsache, daß die Entwicklung für festes $x \neq 0$ und $\epsilon \to 0$ durchgeführt wurde und somit die Gültigkeit verliert, falls

$$x \;=\; O_s(\epsilon)$$

oder kleiner vorliegt. Im Fall $x = O_s(\epsilon)$ oder kleiner führen wir die Größe $x^* = x/\epsilon$ ein und erhalten die Darstellung

$$\begin{aligned} f(x;\epsilon) &= e^{-x/\epsilon} - \frac{\epsilon\, e^{-x}}{x+\epsilon} \\ &= e^{-x^*} - \frac{e^{-\epsilon \cdot x^*}}{x^*+1} \\ &= f(x^*;\epsilon). \end{aligned}$$

Nun nehmen wir eine asymptotische Entwicklung für $x^* \neq 0$ fest und $\epsilon \to 0$ wiederum mittels (3.1.1) vor und erhalten

$$\begin{aligned} g(x^*;\epsilon) &= e^{-x^*} - \frac{1}{1+x^*} + \epsilon \cdot \frac{x^*}{1+x^*} - \epsilon^2 \frac{{x^*}^2}{2(1+x^*)} + \epsilon^3 \frac{{x^*}^3}{6(1+x^*)} + O(\epsilon^4) \\ &= \sum_{n=1}^{N+1} \epsilon^{n-1} g_n(x^*) + O(\epsilon^{N+1}) \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

mit

$$g_1(x^*) \;=\; e^{-x^*} - \frac{1}{1+x^*}, \quad g_n(x^*) \;=\; \frac{(x^*)^{n-1}}{(n-1)!\,(1+x^*)}, \quad n = 2, \ldots$$

Mit $\epsilon = 0.1$ ergibt sich mit $x = x^* \cdot \epsilon$:

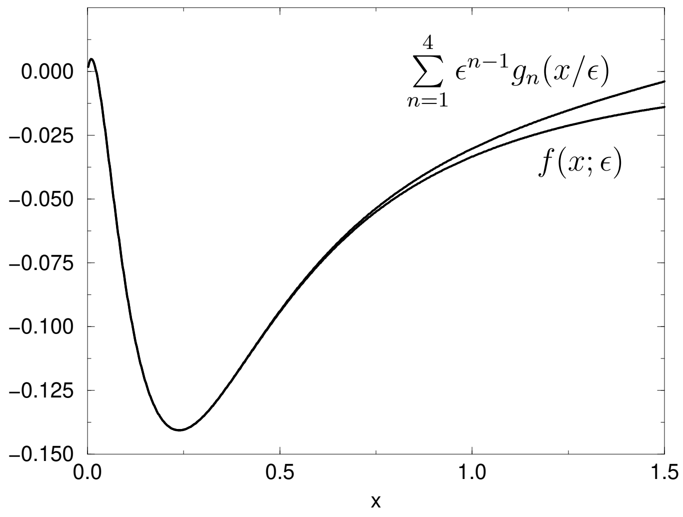


Abbildung 3.2: Exakte Lösung und innere Entwicklung

Hier sehen wir eine gute bereinstimmung für x klein aber eine Ungültigkeit der Entwicklung für x groß. Die Abweichungen rühren auch hier direkt aus den Voraussetzungen für die Entwicklung (x^* fest, $\epsilon \to 0$). Hiermit ergibt sich sofort, das für $x \neq 0$ fest und $\epsilon \to 0$, $x^* \to \infty$ folgt, wodurch die Voraussetzungen verletzt sind und die Reihe (3.1.5) divergiert.

Wir bezeichnen aufgrund ihres Gültigkeitsbereiches (3.1.4) als äußere und (3.1.5) als innere Entwicklung.

Bei den im folgenden betrachteten Differentialgleichungen liegt in der Regel keine explizite Form der Lösung vor, so daß eine Vorgehensweise gemäß Satz 3.6 nicht durchgeführt werden kann. Der Satz beinhaltet jedoch bei gegebener asymptotischer Folge zum einen die Eindeutigkeit der asymptotischen N-term Entwicklung und zum anderen können wir hiermit auf eine nicht zu vernachlässigende Problematik asymptotischer Entwicklungen aufmerksam machen. Durch die Wahl der asymptotischen Folge wird der Funktionenraum festgelegt, innerhalb dessen die Lösung des Ausgangsproblems gesucht wird, ohne generell Kriterien zur Verfügung zu haben, die die Existenz einer Lösung im betrachteten Funktionenraum sicherstellen, oder zumindest garantieren, daß die gesuchte Funktion bis zu einer gewünschten Fehlerschranke approximiert werden kann. Sei zum Beispiel eine Differentialgleichung gegeben, deren exakte Lösung $u(x;\epsilon) = (x + \sqrt{\epsilon})^2$ ist, so können wir bei gewählter asymptotischer Folge $\{\phi_n(\epsilon) = \epsilon^{n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ keine geeignete asymptotische Entwicklung erwarten, da die Lösung nicht durch eine Funktion der Form

$$\sum_{n=1}^{N} \phi_n(\epsilon) u_n(x)$$

dargestellt werden kann. Dieser Sachverhalt wird auch dadurch verdeutlicht, daß bei Verwendung der Vorschrift (3.1.1) unter Ausnutzung der exakten Lösung der Grenzwert zur Festlegung der Funktion $u_2(\underline{x})$ nicht existiert. Im Gegensatz hierzu liegt für

$\left\{\phi_n(\epsilon) = \epsilon^{\frac{n-1}{2}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ bereits mit

$$\sum_{n=1}^{3} \phi_n(\epsilon) u_n(x)$$

die exakte Lösung vor, wenn die Funktionen u_1, u_2, u_3 bei Kenntnis der exakten Lösung durch (3.1.1) ermittelt wurden. Hieraus ersehen wir, daß der Erfolg einer asymptotischen Analyse eng mit einer geeigneten Wahl der asymptotischen Folge verknüpft ist. Bevor wir Gleichungen zur Berechnung asymptotischer Entwicklungen für homogene Differentialgleichungen beschreiben, werden wir mit dem folgenden Satz eine für die asymptotische Analyse fundamentale Eigenschaft beweisen.

Satz 3.8.
Sei $\{\phi_n(\epsilon)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine asymptotische Folge, L_n, $n = 1, \ldots, N$ beliebige von ϵ unabhängige Terme, dann sind die Aussagen

$$\sum_{n=1}^{N} \phi_n(\epsilon) L_n = o(\phi_N(\epsilon)),\ \epsilon \to 0, \tag{3.1.6}$$

und

$$L_n = 0,\ n = 1, \ldots, N. \tag{3.1.7}$$

äquivalent.

Beweis:
"(3.1.7) $\Rightarrow$ (3.1.6)" :
Ergibt sich direkt durch Einsetzen von (3.1.7) in (3.1.6).

"(3.1.6) $\Rightarrow$ (3.1.7)" :
Annahme: Es gibt Terme $L_1, \ldots, L_N$ mit $\max\limits_{n=1,\ldots,N} |L_n| > 0$, die die Gleichung (3.1.6) erfüllen. Sei $m = \min\limits_{\substack{n=1,\ldots,N \\ L_n \neq 0}} n$, dann folgt mit (3.1.6)

$$\sum_{n=1}^{m} \phi_n(\epsilon) L_n = o(\phi_m(\epsilon)),\ \epsilon \to 0.$$

Somit erhalten wir durch

$$0 = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\sum\limits_{n=1}^{m} \phi_n(\epsilon) L_n}{\phi_m(\epsilon)} = L_m + \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\sum\limits_{n=1}^{m-1} \phi_n(\epsilon) L_n}{\phi_m(\epsilon)} = L_m$$

einen Widerspruch zur getroffenen Annahme. □

Eine übliche Vorgehensweise bei der Verwendung asymptotischer Entwicklungen für homogene Differentialgleichungen verläuft nach den folgenden Schritten. Zunächst wird mittels einer gewählten asymptotischen Folge $\{\phi_n(\epsilon)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein Ansatz der Form

$$u(\underline{x}; \epsilon) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n(\epsilon) u_n(\underline{x}) + o\left(\phi_N(\epsilon)\right),\ \epsilon \to 0$$

für die Lösung u der Differentialgleichung vorgenommen. Anschließend wird der Ansatz in die Differentialgleichungen eingesetzt und diese in die Form

$$\sum_{n=1}^{M} \psi_k(\epsilon) L_k(u_1, \dots, u_N) = o\left(\psi_M(\epsilon)\right), \ \epsilon \to 0$$

mit $M \in \mathbb{N}$ und einer Folge $\{\psi_k(\epsilon)\}_{k=1,\dots,M}$, $\psi_{k+1}(\epsilon) = o\left(\psi_k(\epsilon)\right), \ \epsilon \to 0$ für $k = 1, \dots, M-1$ geschrieben. Die Operatoren $L_k, \ k = 1, \dots, M$ sind hierbei unabhängig von ϵ, wodurch mit Satz 3.8 die gesuchten Funktionen $u_n, n = 1, \dots, N$ durch Lösen der Differentialgleichungen

$$L_k(u_1, \dots, u_N) = 0, \ k = 1, \dots, M$$

gewonnen werden können.

4 Entwicklungen für gewöhnliche Differentialgleichungen

Gesucht:
$u(\underline{x};\epsilon)$ als Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung, welche den Parameter ϵ enthält.

Voraussetzungen:

- L, M sind Differentialoperatoren
- L ist linear
- Anfangs- und Randbedingungen sind unabhängig von ϵ
- $u_0(\underline{x})$ ist Lösung von $L(u) = 0$ und erfüllt die Rand- und Anfangsbedingungen

Differentialgleichung:

$$L(u) + \epsilon M(u) \;=\; 0 \quad \text{in } D \tag{4.0.8}$$

Ansatz:

$$u(\underline{x};\epsilon) \;=\; u_0(\underline{x}) + \phi_1(\epsilon)u_1(\underline{x}) + o(\phi_1) \quad \text{mit} \quad \phi_1(\epsilon) \;=\; O(1),\;\; \epsilon \to 0. \tag{4.0.9}$$

Mit

$$\begin{aligned} L(u) &\overset{\text{lin.}}{=} L(u_0) + \phi_1(\epsilon)L(u_1) + o(\phi_1) \\ &= \phi_1(\epsilon)L(u_1) + o(\phi_1) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \epsilon M(u) &= \epsilon \cdot M\left(u_0 + \phi_1 u_1 + o(\phi_1)\right) \\ &= \epsilon \cdot \left[M(u_0) + \frac{\partial\, M(u_0)}{\partial\, u} \cdot (\phi_1 u_1 + o(\phi_1)) + O((\phi_1 \cdot u_1)^2)\right] \\ &= \epsilon \cdot M(u_0) + o(\phi_1) \end{aligned}$$

folgt durch Einsetzen von (4.0.9) in (4.0.8)

$$\phi_1(\epsilon)L(u_1(\underline{x})) \;=\; -\epsilon M(u_0(\underline{x})) \quad \text{in } D \tag{4.0.10}$$

mit verschwindenden Anfangs- und Randbedingungen (durch $L(u_0) = 0$ eliminiert). Ist nun $\phi_1 \ll \epsilon$, so folgt

$$L(u_1) \;=\; 0$$

und somit bei verschwindenden Anfangs- und Randbedingungen ergibt sich aufgrund der Linearität

$$u_1 \;=\; 0.$$

Ist $\phi_1 \gg \epsilon$, so folgt zumeist die Bedingung

$$M(u_0) \;=\; 0,$$

die in der Regel nicht erfüllt ist.

Sinnvoll scheint daher eine Wahl von $\phi_1 = O_s(\epsilon)$ zu sein, zum Beispiel:

$$\phi_1(\epsilon) \;=\; \epsilon.$$

Hiermit folgt aus (4.0.10)

$$L(u_1) \;=\; -M(u_0). \tag{4.0.11}$$

Ist nun u_1 aus (4.0.11) ermittelt, so kann man sukzessive durch Erweiterung von (4.0.9) eine inhomogene Differentialgleichung für u_i in der Form

$$L(u_i(\underline{x})) \;=\; f_i(\underline{x}), \qquad i = 2, 3, \ldots, \quad \underline{x} \in D$$

aufstellen.

Achtung:
Die asymptotische Folge $\{\phi_n(\epsilon)\}$ muß unter den oben an ϕ_1 angedeuteten Bedingungen gewählt werden.

Beispiel 4.1.
Gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung

$$u'(x;\epsilon) + 2xu(x;\epsilon) - \epsilon u^2(x;\epsilon) \;=\; 0, \quad \text{für} \quad \epsilon \to 0 \tag{4.0.12}$$

mit $D = \mathbb{R}_0^+$ und der Randbedingung

$$u(0;\epsilon) \;=\; 1.$$

Wir wählen den Ansatz (4.0.9) mit $\phi_1(\epsilon) = \epsilon$

1. Schritt:

Schreibe (4.0.12) in der Form

$$L(u) + \epsilon M(u) \;=\; 0,$$

d.h.

$$\begin{aligned} L(u) &= u' + 2xu \\ M(u) &= -u^2 \end{aligned}$$

2. Schritt:

Löse $L(u_0) = 0$ unter Berücksichtigung der Randbedingung

$$u_0'(x) + 2xu_0(x) \;=\; 0 \quad \text{mit} \quad u_0(0) = 1$$

$$\Rightarrow \quad u_0(x) \;=\; e^{-x^2} \tag{4.0.13}$$

3. Schritt:

Einsetzen von (4.0.9) mit (4.0.13) in (4.0.12) liefert

$$\phi_1(\epsilon)\,[u_1' + 2xu_1] \;=\; \epsilon u_0^2 + o(\phi_1(\epsilon)) \tag{4.0.14}$$

Mit $\phi_1(\epsilon) = \epsilon$ ergibt sich

$$u_1'(x) + 2xu_1(x) \;=\; e^{-x^2}$$

mit

$$\begin{aligned} u_1(0) &= 0 \\ \Rightarrow \qquad u_1(x) &= e^{-x^2} \int\limits_0^x e^{-s^2} ds \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Entwicklung

$$u(x;\epsilon) \;=\; e^{-x^2} \left(1 + \epsilon \int\limits_0^x e^{-s^2} ds \right) + o(\epsilon). \tag{4.0.15}$$

Da $e^{-x^2} \leq 1$ und $\int\limits_0^x e^{-s^2} ds \leq \int\limits_0^\infty e^{-s^2} ds = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ in D gilt, ergibt sich $|u_0(x)| \leq 1$ und $|u_1(x)| < \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ in D und somit die gleichmäßige Gültigkeit von (4.0.15) in D.

Aus der Entwicklung lassen sich auch die Anforderungen an die asymptotische Folge sehr gut verdeutlichen.

Wählen wir

- $\phi_1(\epsilon) \ll \epsilon$,

  dann folgt mit (4.0.14) die Bedingung

  $$u_0^2 \;=\; 0,$$

  die im Widerspruch zu (4.0.13) steht.

- $\phi_1(\epsilon) \gg \epsilon$,

  dann folgt mit (4.0.14) die homogene Differentialgleichung

  $$u_1(x) + 2xu_1(x) \;=\; 0, \quad \text{in } D,$$

  die aufgrund der Randbedingung

  $$u_1(0) \;=\; 0$$

  die Lösung

  $$u_1 \;\equiv\; 0$$

  besitzt.

4.1 Der gestörte Oszillator

Wir betrachten die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$u''(x;\epsilon) + (1 - \epsilon e^{-ax})u(x;\epsilon) \;=\; 0, \quad a > 0,\; x \in \mathbb{R}_0^+,\; \epsilon \in (0, \epsilon_1) \tag{4.1.1}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(0;\epsilon) \;=\; 0, \quad u'(0;\epsilon) \;=\; 0, \quad \epsilon \in (0, \epsilon_1). \tag{4.1.2}$$

Die ungestörte Differentialgleichung $u''(x) + u(x) = 0$ hat bei obigen Anfangsbedingungen die Lösung

$$u(x) \;=\; \sin\, x.$$

Wir stellen uns nun die Fragen:

- Wie wirkt sich die Störung auf das Verhalten der Lösung aus?
- Können wir mit der zu Beginn dieses Abschnitts beschriebenen Vorgehensweise eine asymptotische Entwicklung berechnen, die für $\epsilon \to 0$ gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}^+$ gegen die Lösung des ungestörten Problems konvergiert?

Wir schreiben die Differentialgleichung (4.1.1) in der Form

$$L(u(x;\epsilon)) + \epsilon\, M(u(x;\epsilon)) \;=\; 0$$

mit dem linearen Differentialoperator

$$L(u(x;\epsilon)) \;=\; u''(x;\epsilon) + u(x;\epsilon), \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$

und

$$M(u(x;\epsilon)) \;=\; -e^{-ax}u(x;\epsilon), \quad a > 0, \quad x \in \mathbb{R}_0^+.$$

Wie bereits im vorangegangenen Beispiel wählen wir $\phi_1(\epsilon) = \epsilon$ und suchen eine asymptotische Entwicklung der Form

$$u(x;\epsilon) \;=\; u_0(x) + \phi_1(\epsilon)u_1(x) + o(\phi_1(\epsilon)).$$

Als Lösung der Gleichung

$$L(u_0(x)) \;=\; 0$$

mit $u_0(0) = u_0'(0) = 0$ erhalten wir

$$u_0(x) \;=\; \sin\, x.$$

Zur Ermittlung von $u_1(x)$ betrachten wir

$$\begin{aligned} & L(u_1(x)) && = \; -M(u_0(x)) \\ \Longleftrightarrow \quad & u_1''(x) + u_1(x) && = \; e^{-ax}\sin\, x,\; x \in \mathbb{R}_0^+ \end{aligned}$$

mit

$$u_1(0) \;=\; u_1'(0) \;=\; 0.$$

Hieraus ergibt sich

$$u_1(x) \;=\; \frac{e^{-ax}+1}{4+a^2}\,\sin x + \frac{2(e^{-ax}-1)}{a(4+a^2)}\,\cos x,$$

denn

$$u_1(0) \;=\; \frac{e^0+1}{4+a^2}\underbrace{\sin 0}_{=0} + \underbrace{\frac{2(e^0-1)}{a(4+a^2)}}_{=0}\cos 0 \;=\; 0$$

$$u_1'(x) \;=\; \frac{2-(a^2+2)e^{-ax}}{a(4+a^2)}\,\sin x + \frac{1-e^{-ax}}{4+a^2}\,\cos x$$

$$\Longrightarrow \quad u_1'(0) \;=\; 0$$

$$u_1''(x) \;=\; \frac{(a^2+3)e^{-ax}-1}{4+a^2}\,\sin x + \frac{2(1-e^{-ax})}{a(4+a^2)}\,\cos x$$

$$\Longrightarrow \quad u_1''(x) + u_1(x)$$

$$= \frac{(a^2+3)e^{-ax}-1+e^{-ax}+1}{4+a^2}\,\sin x + \frac{2(1-e^{-ax}+e^{-ax}-1)}{a(4+a^2)}\,\cos x$$

$$= \frac{a^2+4}{4+a^2}\,e^{-ax}\sin x$$

$$= e^{-ax}\sin x.$$

Die Funktion $u_1(x)$ ist auf ganz $\mathbb{R}_0^+$ wegen

$$u_1(x) \;\le\; \frac{1+e^{-ax}}{4+a^2} + \frac{2(1-e^{-ax})}{a(4+a^2)} \;\le\; \frac{2}{4+a^2} + \frac{2}{a(4+a^2)} \;=\; \frac{2a+2}{a(4+a^2)} \tag{4.1.3}$$

beschränkt und die asymptotische Entwicklung

$$u(x;\epsilon) \;=\; u_0(x) + \epsilon\, u_1(x) + o(\epsilon) \tag{4.1.4}$$

ist für $x \in \mathbb{R}_0^+$ gleichmäßig gültig. Die Abbildung 4.1 zeigt den Verlauf der Funktionen $u_0(x), u_1(x)$ und der asymptotischen Entwicklung (4.1.4) ohne $o(\epsilon)$-Terme für $a = 0.02$ und $\epsilon = 0.1$.

Wir erkennen, daß der Einfluß der Störung der Differentialgleichung auf das Verhalten der Entwicklung mit wachsendem x zunimmt, obwohl der Störterm exponentiell abklingt. Aus (4.1.3) ersehen wir jedoch, daß die Störung für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$ eine beschränkte Wirkung hat und die Entwicklung beschränkt bleibt und sich auch für sehr große x nicht „aufschaukelt“.

An dieser Stelle muß allerdings deutlich darauf hingewiesen werden, daß mit der beschriebenen Vorgehensweise kein allgemeingültiger Ansatz zur Berechnung einer regulären Entwicklung vorliegt. Die Gültigkeit der erzielten Entwicklung liegt nicht im Ansatz, sondern in der Form des Störterm begründet. Diese Tatsache wird sehr schnell

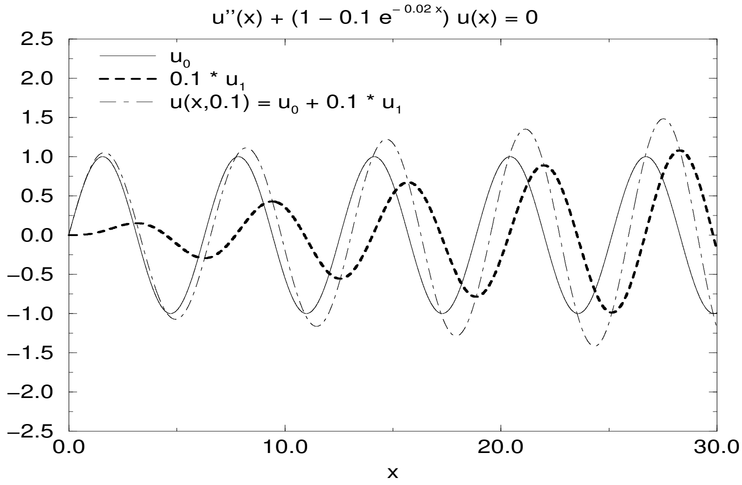


Abbildung 4.1: Der gestörte Oszillator

deutlich, wenn wir den exponentiell abfallenden Term $\epsilon \cdot e^{-ax}$ durch einen für $x \to 0$ nicht notwendigerweise verschwindenden Term ersetzen.

Wir betrachten hierzu die Differentialgleichung

$$u''(x;\epsilon) + (1 + \epsilon\, u^2(x;\epsilon))\, u(x;\epsilon) \;=\; 0, \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$

bei gleichbleibenden Anfangsbedingungen (4.1.2). Folglich erhalten wir wiederum

$$u_0(x) \;=\; \sin x.$$

Für u_1 ergibt sich die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} u_1'' + u_1 &= -u_0^3 \;=\; -\sin^3 x \\ &= -\frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{4}\sin 3x \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u_1(0) \;=\; u_1'(0) \;=\; 0.$$

Als Lösung erhalten wir

$$u_1(x) \;=\; -\frac{9}{32}\sin x - \frac{1}{32}\sin 3x + \frac{3}{8}\,x\cos x,$$

denn in diesem Fall gilt $u_1(0) = 0$ und

$$\begin{aligned} u_1'(x) &= -\frac{9}{32}\cos x - \frac{3}{32}\cos 3x + \frac{3}{8}\cos x - \frac{3}{8}\,x\sin x \\ &= \frac{3}{32}\cos x - \frac{3}{32}\cos 3x - \frac{3}{8}\,x\sin x, \end{aligned}$$

wodurch

$$u_1'(0) \;=\; 0$$

folgt. Wegen

$$u_1''(x) \;=\; -\frac{15}{32}\sin x + \frac{9}{32}\sin 3x - \frac{3}{8}\,x\cos x$$

erfüllt u_1 zudem die Differentialgleichung (4.1.5).

Im Gegensatz zum Beispiel (4.1.1) enthält die asymptotische Entwicklung

$$u(x;\epsilon) \;=\; u_0(x) + \epsilon\, u_1(x) + o(\epsilon), \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$

mit $x\cos x$ einen Term, der für $x \to \infty$ nicht beschränkt bleibt, sondern linear ansteigt. Wir haben somit keine gleichmäßig gültige Entwicklung auf ganz $\mathbb{R}_0^+$ vorliegen. Beschränken wir uns auf Intervalle $[0, b]$ respektive auf Bereiche $0 \le x \le X(\epsilon)$ mit $X(\epsilon) = O(1)$ für $\epsilon \to 0$, so existiert eine Konstante C unabhängig von ϵ mit

$$|u_1(x)| \;\le\; C \quad \forall\, x \in [0, X(\epsilon)]$$

und wir haben somit in diesem Fall eine gleichmäßig gültige Entwicklung vorliegen.

Für $X(\epsilon) = O(\epsilon^{-1})$, also z.B. $X(\epsilon) = \epsilon^{-1}$ erhalten wir

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\max_{x\in[0,X(\epsilon)]} |\epsilon \cdot u_1(x)|\right) \;\neq\; 0.$$

Dieses Verhalten deutet daraufhin, daß der Störterm $\epsilon \cdot u^3(x)$ nicht korrekt berücksichtigt wurde. Eine geeignete Vorgehensweise liegt in der Verwendung unterschiedlicher (in diesem Fall räumlicher) Skalen, wie wir sie in Kapitel 7 vorstellen werden.

4.2 Das gestörte Randwertproblem

Betrachten wir zunächst ein Randwertproblem bei dem wir mit der beschriebenen Technik eine gleichmäßig gültige Entwicklung erhalten. Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$(xu'(x;\epsilon))' - \epsilon\, u(x;\epsilon) \;=\; 0, \quad x \in [1,2]$$

mit den Randbedingungen

$$u(1;\epsilon) \;=\; 1, \quad u(2;\epsilon) \;=\; 2.$$

Hierbei bedeutet wie im folgenden „ $'$ “ stets die Ableitung nach x .

Das ungestörte Problem $(x\,u'(x))' = 0$ hat wegen

$$x\,u'(x) \;=\; \text{const} \quad \Rightarrow \quad u'(x) \;=\; \frac{\text{const}}{x} \tag{4.2.1}$$

eine Singulariät bei $x = 0$, die jedoch außerhalb des Intervalls liegt. Aus (4.2.1) läßt sich unter Berücksichtigung der Randbedingungen sehr einfach die Lösung u_0 des homogenen Problems

$$L(u_0) \;=\; 0$$

zu

$$u_0(x) \;=\; \frac{\log\, x}{\log\, 2} + 1$$

ermitteln. Betrachten wir wiederum den Ansatz

$$u(x;\epsilon) \;=\; u_0(x) + \epsilon\, u_1(x) + o(\epsilon), \tag{4.2.2}$$

so ergibt sich wegen (4.0.11) für die Gleichung

$$(x\,u_1'(x))' \;=\; u_0(x), \quad x \in [1,2]$$

mit den Randbedingungen $u_1(1) = u_1(2) = 0$.

Die Lösung ist nicht unmittelbar ablesbar und schreibt sich als

$$u_1(x) \;=\; \left[\frac{2}{(\log\, 2)^2} - \frac{3}{\log\, 2}\right] \log\, x + \frac{2}{\log\, 2} - 1 + \frac{x \log\, x}{\log\, 2} + \left(1 - \frac{2}{\log\, 2}\right) x.$$

Direkt zu sehen ist jedoch, daß $u_1(x)$ auf $[1,2]$ beschränkt ist und mit (4.2.2) eine reguläre Entwicklung für $\epsilon \to 0$ vorliegt.

Stellt sich für uns nun die Frage nach Indizien, die auf ein Versagen des Algorithmus zur Berechnung regulärer Entwicklungen hindeuten.

1) Das Beispiel des gestörten Osziallators zeigte, daß im Fall eines unbeschränkten Gebietes der Störterm für (z.B. $x \to \infty$) nicht stark ansteigen sollte.

2) Im Fall eines Randwertproblems über einem beschränkten Gebiet liegt das Scheitern des Verfahrens oftmals darin begründet, daß die Differentialgleichung für $\epsilon \to 0$ ihren Typ wechselt bzw. eine Ordnung verliert und damit das Problem bei gegebenen Randbedingungen überbestimmt ist.

Zur Verdeutlichung des zweiten Punktes betrachten wir das Randwertproblem

$$\epsilon \cdot u''(x;\epsilon) + u'(x;\epsilon) \;=\; 2, \quad x \in [0,1] \tag{4.2.3}$$

mit $u(0;\epsilon) = 0\,,\; u(1;\epsilon) = 1\,.$

Für $\epsilon > 0$ lautet die exakte Lösung

$$u^{\text{ex.}}(x;\epsilon) \;=\; 2x + \frac{1 - e^{-x/\epsilon}}{e^{-1/\epsilon} - 1}. \tag{4.2.4}$$

Im Grenzfall $\epsilon \to 0$ geht die Differentialgleichung (4.2.3) in eine Differentialgleichung 1. Ordnung über, so daß es nicht verwunderlich ist, daß die für $x \neq 0$ ermittelte exakte Lösung

$$u^{\text{ex.}}(x;0) \;=\; \lim_{\epsilon \to 0} u^{\text{ex.}}(x;\epsilon) \;=\; 2x - 1$$

nicht beide Randbedingungen erfüllt. Wir erhalten $\lim\limits_{x \to 0} u^{\text{ex.}}(x;0) = -1$ und $u^{\text{ex.}}(1;0) = 1$, so daß lediglich die Randbedingung bei $x = 1$ erfüllt wird. Nutzen wir nun den Algorithmus zur Berechnung einer asymptotischen Entwicklung der Form

$$u(x;\epsilon) \;=\; u_0(x) + \epsilon\, u_1(x) + o(\epsilon)$$

für das Randwertproblem (4.2.3), so ist es daher nur sinnvoll eine äußere Entwicklung zu ermitteln, die die Randbedingung an der Stelle $x = 1$ erfüllt.

Aus dem homogenen Problem

$$L(u_0(x)) \;=\; 0, \quad L(u) \;=\; u' - 2$$

erhalten wir

$$u_0(x) \;=\; 2x + C$$

und mittels $u_0(1) = 1$ folgt $C = -1$.

Bemerkung 4.2.
Die Wahl der Randbedingung zur Festlegung der Konstanten C ist aus der Kenntnis der exakten Lösung gewonnen worden. Diese liegt in der Regel nicht vor, so daß nicht direkt offensichtlich ist, welche Randbedingung gewählt werden soll.

Die Problematik liegt in diesem Fall darin begründet, daß die höchste Ableitung innerhalb der Differentialgleichung mit dem Parameter ϵ multipliziert wird. Daher liegt eine Transformation

$$x \;\to\; x^*(x) \;=\; \frac{x}{\epsilon}$$

nahe. Mit $\omega(x^*;\epsilon) = u(x;\epsilon)$ erhalten wir

$$\frac{d\omega(x^*;\epsilon)}{dx} \;=\; \frac{d\omega(x^*;\epsilon)}{dx^*} \cdot \frac{dx^*}{dx} \;=\; \frac{1}{\epsilon}\,\frac{d\omega(x^*;\epsilon)}{dx^*}$$

und wir können die Randwertaufgabe (4.2.3) in der Form

$$\omega''(x^*;\epsilon) + \omega'(x^*;\epsilon) \;=\; 2\epsilon \tag{4.2.5}$$

mit den Randbedingungen

$$\omega(0;\epsilon) \;=\; 0, \quad \omega\left(\frac{1}{\epsilon};\epsilon\right) \;=\; 1$$

schreiben.

Zunächst erhoffen wir uns hierdurch eine echte Verbesserung, da die Differentialgleichung keine Ordnung im Fall $\epsilon \to 0$ verliert. Betrachten wir die exakte Lösung der Differentialgleichung (4.2.5) für $\epsilon > 0$

$$\omega^{\text{ex.}}(x^*;\epsilon) \;=\; 2\epsilon\, x^* + \frac{1-e^{-x^*}}{e^{-1/\epsilon}-1},$$

so erhalten wir für $x^* \in \mathbb{R}_0^+$

$$\omega^{\text{ex.}}(x^*;0) \;=\; \lim_{\epsilon\to 0} \omega^{\text{ex.}}(x^*;\epsilon) \;=\; e^{-x^*} - 1. \tag{4.2.6}$$

Hieraus ersehen wir, daß $\omega^{\text{ex.}}$ die Randbedingung

$$\omega^{\text{ex.}}(0;0) \;=\; 0$$

erfüllt, jedoch

$$\lim_{x^*\to\infty} \omega^{\text{ex.}}(x^*;0) \;=\; -1 \;\neq\; 1$$

folgt. Damit ist es in diesem Fall lediglich sinnvoll eine innere Entwicklung vorzunehmen, da nicht erwartet werden kann, daß eine asymptotische Entwicklung der Form

$$\omega(x^*;\epsilon) \;=\; \omega_0(x^*) + \epsilon\,\omega_1(x^*) + o(\epsilon) \tag{4.2.7}$$

im Grenzfall $\epsilon \to 0$ die äußere Randbedingung erfüllt.

Bemerkung 4.3.
Es gilt

$$\lim_{x^*\to\infty} \omega^{\text{ex.}}(x^*;0) \;=\; -1 \;=\; \lim_{x\to 0} u^{\text{ex.}}(x;0). \tag{4.2.8}$$

Auf diese Eigenschaft, die auch als Anpassungsbedingung (matching condition) bezeichnet wird, kommen wir noch in dem folgenden Kapitel zurück.

Die übliche Vorgehensweise für $\omega_0(x^*)$ aus (4.2.7) unter Berücksichtigung der Randbedingung im Ursprung

$$\omega_0(x^*) \;=\; k\left(1-e^{-x^*}\right).$$

Erst die Bedingung (4.2.8) liefert $k = -1$.

Zusammenfassend sehen wir, daß weder die innere Entwicklung im Grenzfall $\epsilon \to 0$ bei festem $x \neq 0$ noch die äußere Entwicklung im Grenzfall $\epsilon \to 0$ bei festem $x^* \neq \infty$ eine für alle $0 \leq x \leq 1$ gültige Entwicklung liefert. Die Eigenschaft charakterisiert singulär gestörte Probleme. Im Gegensatz zu regulär gestörten Problemen, bei denen ein einziger Grenzübergang mit $\epsilon \to 0$ eine gültige Lösung liefert, müssen wir uns bei singulär gestörten Problemen über eine geeignete Koppelung der inneren und äußeren Entwicklung Gedanken machen.

4.3 Ein Masse-Feder-Dämpfer-System

Wir betrachten ein mechanisches System mit den Elementen Motor, Feder, Masse und Dämpfer nach Abbildung 4.2.

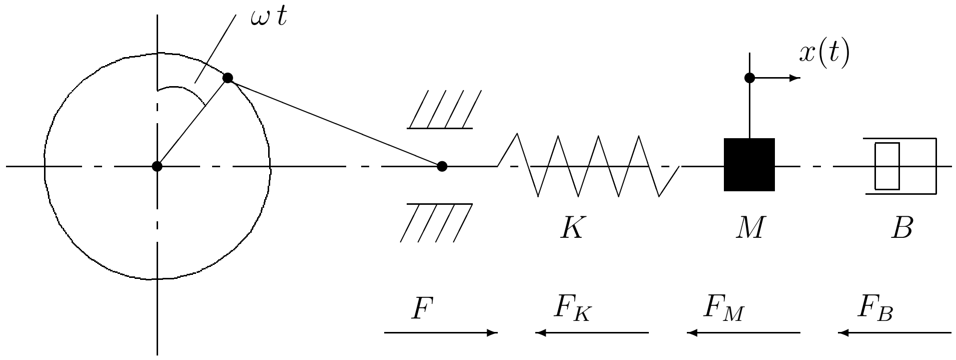


Abbildung 4.2: Mechanisches System und Kräftebilanz

Die vom Motor wirkende Kraft F ist gegeben durch $F = K_0 \cos \omega t$, die Feder und die Dämpfung seien linear. Damit ergibt sich mit der Federkonstanten K und dem Proportionalitätsfaktor B der Dämpfung

$$\begin{aligned} F_K &= K\,x(t), \\ F_B &= B\,x'(t). \end{aligned}$$

Nach Newtons zweitem Bewegungsgesetz gilt *Kraft* = *Masse* × *Beschleunigung*, also

$$F_M = M\,x''(t).$$

Aus der Kräftebilanz $F = F_K + F_M + F_B$ folgt dann eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Auslenkung $x(t)$ der Masse, und zwar

$$M\,x''(t) + B\,x'(t) + K\,x(t) = K_0 \cos \omega t. \tag{4.3.1}$$

Zur Zeit $t = 0$ sei die Masse in ihrer Ruhelage gewesen. Dann wurde die Masse angestoßen, und zwar mit einer vorgeschriebenen nderungsrate. Das ergibt die beiden Anfangswerte

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ x'(0) &= x_0' \end{aligned}\right\} \tag{4.3.2}$$

für (4.3.1).

Wir betrachten zu Beginn den Fall eines Feder-Masse-Dämpfung-Systems ohne externen Antrieb, d.h. die homogene Differentialgleichung

$$x''(t) + \frac{B}{M}\,x'(t) + \frac{K}{M}\,x(t) = 0.$$

Es werden nun 4 Fälle unterschieden.

Fall 1: $B^2 > 4MK$ „starke Dämpfung“

In diesem Fall überwiegt die Dämpfung jeden anderen Effekt und man erhält als allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 \exp\left(\frac{1}{2M}\left(-B+\sqrt{B^2-4MK}\right)t\right) + c_2 \exp\left(\frac{1}{2M}\left(-B-\sqrt{B^2-4MK}\right)t\right)$$

mit zwei Konstanten c_1, c_2, die sich je nach Anfangsbedingung einstellen. Der Typ der Lösung ist in Abbildung 4.3 dargestellt. Je nach Anfangsbedingung ergibt sich das Verhalten bei $t = 0$. In allen Fällen tendiert das System jedoch schnell zur Ruhelage.

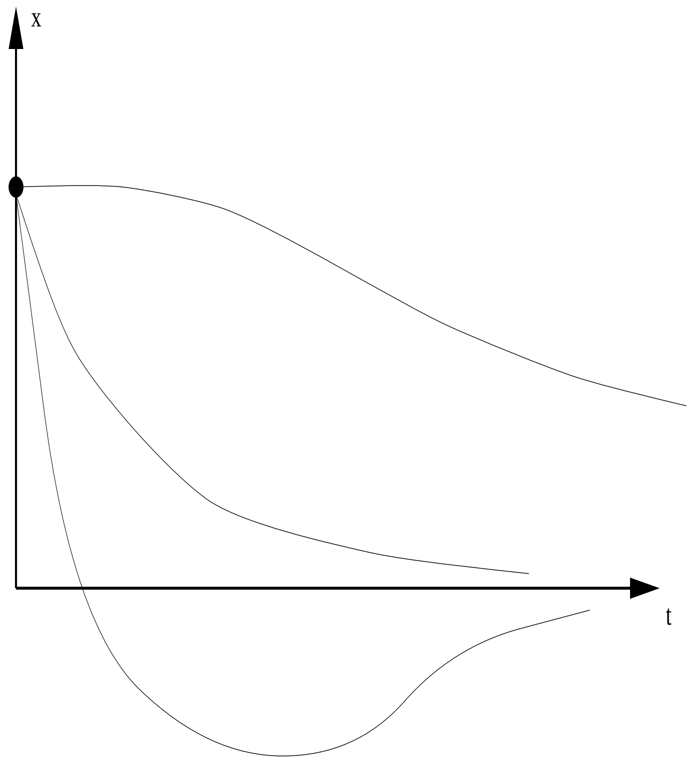


Abbildung 4.3: Mögliche Lösungen im Fall starker Dämpfung

Fall 2: $B^2 = 4MK$ „aperiodischer Grenzfall“

Dies ist der bergang von starker zu schwacher Dämpfung. Als allgemeine Lösung ergibt sich

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) \exp\left(-\frac{B}{2M}t\right).$$

Fall 3: $B^2 < 4MK$ „schwache Dämpfung“

Durch eine kleine Dämpfung kann das Masse-Feder-System relativ frei schwingen, wird aber für große Zeiten in die Ruhelage gezwungen. Die allgemeine Lösung ist

$$x(t) = \exp\left(-\frac{B}{2M}t\right)\left(c_1 \cos\sqrt{\frac{K}{M}-\frac{B^2}{4M^2}}\,t + c_2 \sin\sqrt{\frac{K}{M}-\frac{B^2}{4M^2}}\,t\right)$$

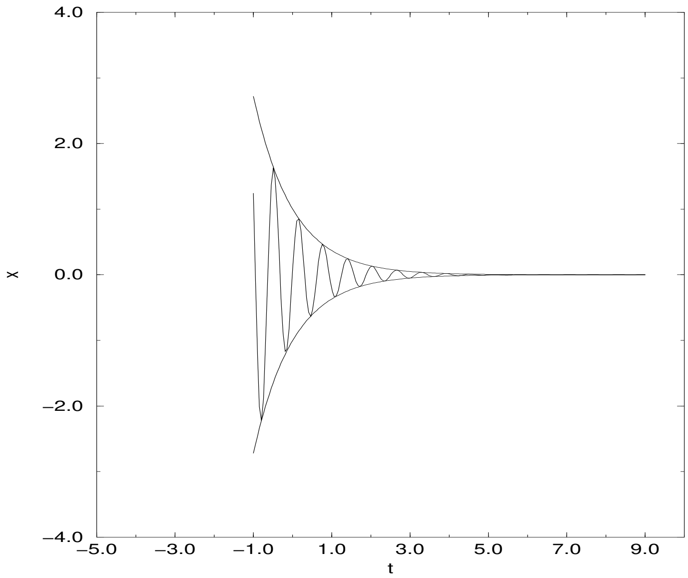


Abbildung 4.4: Typische Lösung im Fall schwacher Dämpfung

und der Graph einer typischen Lsung ist in Abbildung 4.4 zu sehen.

Fall 4: $B = 0$ „dämpfungsfrei“
In diesem Fall ergibt sich mit

$$x(t) \;=\; c_1 \cos \sqrt{\frac{K}{M}}\, t + c_2 \sin \sqrt{\frac{K}{M}}\, t$$

eine ungedämpfte Schwingung des Masse-Feder-Systems.

In den vier Fällen sind typische Größen als Argumente der Winkelfunktionen und der Exponentialfunktion aufgetreten. Diese Größen sind so wichtig, daß es eigene Namen für sie gibt. Man nennt

$$\omega_0 \;:=\; \sqrt{\frac{K}{M}}$$

die *Eigenfrequenz des ungedämpften Systems*,

$$\omega_e \;:=\; \sqrt{\frac{K}{M} - \frac{B^2}{4M^2}}$$

heißt *Eigenfrequenz des gedämpften Systems*, und

$$D \;:=\; \frac{B}{2M}$$

ist die *Abklingkonstante*. Zwischen diesen Größen besteht die Beziehung

$$\omega_e \;=\; \sqrt{\omega_0^2 - D^2}.$$

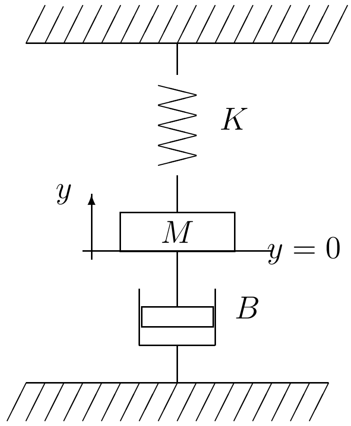


Abbildung 4.5: Feder-Masse-Dämpfer-System

Im folgenden betrachten wir ein Feder-Masse-Dämpfer-System wie in Abbildung 4.5, das zur Zeit $t = 0$ durch einen Impuls I_0 schlagartig belastet wird.

Dazu verwenden wir die Deltafunktion $\delta(t)$, die formal durch

$$\begin{aligned} \delta(t) &= 0, \quad t \neq 0 \\ \int_{\mathbb{R}} f(t)\delta(t)\,dt &= f(0) \end{aligned}$$

definiert ist. Die zugehörige Differentialgleichung läßt sich damit in der Form

$$M\,y''(t) + B\,y'(t) + K\,y(t) \;=\; I_0\delta(t) \tag{4.3.3}$$

schreiben. Als Anfangsbedingungen schreiben wir

$$\left.\begin{aligned} y(0^-) &= 0 \\ y'(0^-) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.3.4}$$

vor, da vor Aufbringen des Impulses I_0 das System in völliger Ruhe ist. Durch einen Trick gelingt die Umformung der Differentialgleichung (4.3.3) in eine homogene Differentialgleichung, deren Lösungsverhalten wir bereits diskutiert haben. Integrieren wir (4.3.3) von $t = 0^-$ bis 0^+, so folgt

$$\int_{0^-}^{0^+} M\,y''(t)\,dt + \int_{0^-}^{0^+} B\,y'(t)\,dt + \int_{0^-}^{0^+} K\,y(t)\,dt \;=\; \int_{0^-}^{0^+} I_0\delta(t)\,dt,$$

was

$$M\left(y'(0^+) - y'(0^-)\right) + B\left(y(0^-) - y(0^-)\right) + \frac{1}{2}K\left(y^2(0^+) - y^2(0^-)\right) \;=\; I_0$$

entspricht. Nun gilt $y(0^+) = y(0^-) = 0$, $y^2(0^+) = y^2(0^-) = 0$, aber $y'(0^+) \neq 0$, da bei $t = 0$ der Impuls I_0 aufgebracht wurde. Wegen der weiteren Anfangsbedingung in (4.3.4) verschwindet auch $y'(0^-)$. Damit bleibt nur noch

$$M\,y'(0^+) \;=\; I_0,$$

bzw.

$$y'(0^+) \;=\; \frac{I_0}{M}.$$

Das zu (4.3.3) äquivalente, homogene Problem für $t > 0$ lautet dann

$$M\,y''(t) + B\,y'(t) + K\,y(t) \;=\; 0, \quad t > 0 \tag{4.3.5}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} y(0^+) & = & 0 \\ y'(0^+) & = & \frac{I_0}{M}. \end{array}\right\} \tag{4.3.6}$$

4.3.1 Der Fall kleiner Dämpfung

Wir wollen zunächst den Fall kleiner Dämpfung diskutieren und dazu die Differentialgleichung (4.3.5) entdimensionalisieren. Dahinter steht die folgende Idee: Wenn B klein ist, dann erwarten wir eine schwach gedämpfte Schwingung, die in etwa der harmonischen Schwingung des ungedämpften Systems entspricht. Das ungedämpfte System wird aber charakterisiert durch die Eigenfrequenz

$$\omega_0 \;=\; \sqrt{\frac{K}{M}}\,\left[\frac{1}{s}\right],$$

und damit ist die Zeitskala des ungedämpften Systems

$$t^* \;\sim\; \sqrt{\frac{M}{K}}\,[s].$$

Unsere Asymptotik sollte diese Zeitskala berücksichtigen, denn sonst machen wir u.U. Aussagen auf einer Skala, die in der Differentialgleichung gar keine Rolle spielt.

Man überlegt sich leicht, daß die Längenskala bei Schwingungsvorgängen keine Rolle spielt, da es sich lediglich um eine Skalierung der Amplitude handelt. Zur Entdimensionalisierung wählen wir daher

$$t^* \;:=\; \frac{t}{\sqrt{\frac{M}{K}}}, \qquad y^* \;=\; \frac{y}{A}, \qquad A\text{-beliebige Länge } [m].$$

Damit geht (4.3.5) über in

$$M\,\frac{d^2}{dt^2}\,\left(Ay^*(t(t^*))\right) + B\,\frac{d}{dt}\,\left(Ay^*(t(t^*))\right) + K\,Ay^*(t(t^*)) \;=\; 0. \tag{4.3.7}$$

Nun gilt $y^*(t) = y^*(t(t^*)) =: \tilde{y}(t^*)$ und

$$\frac{d}{dt^*}\,\tilde{y}(t^*) \;=\; \frac{d}{dt^*}\,y^*(t(t^*)) \;=\; \frac{d}{dt}\,y^*(t)\cdot\frac{dt}{dt^*}.$$

Wegen $\frac{dt}{dt^*} = \sqrt{\frac{M}{K}}$ gilt also

$$\frac{d}{dt}\,y^*(t) \;=\; \sqrt{\frac{K}{M}}\,\frac{d}{dt^*}\,\tilde{y}(t^*).$$

Weiterhin folgt

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^{*2}}\,\tilde{y}(t^*) &= \frac{d}{dt^*}\left(\sqrt{\frac{M}{K}}\,\frac{d}{dt}\,\tilde{y}(t)\right)\\ &= \sqrt{\frac{M}{K}}\,\frac{d^2}{dt^2}\,y^*(t)\cdot\frac{dt}{dt^*} \;=\; \frac{M}{K}\,\frac{d^2}{dt^2}\,y^*(t),\end{aligned}$$

also

$$\frac{d^2}{dt^2}\,y^*(t) \;=\; \frac{K}{M}\,\frac{d^2}{dt^{*2}}\,\tilde{y}(t^*).$$

Ersetzen dieses Terms in der Differentialgleichung (4.3.7) liefert

$$MA\,\frac{K}{M}\,\frac{d^2}{dt^{*2}}\,\tilde{y}(t^*) + BA\sqrt{\frac{K}{M}}\,\frac{d}{dt^*}\,\tilde{y}(t^*) + KA\,\tilde{y}(t^*) \;=\; 0.$$

Wir erkennen hier sofort, daß die Längenskala in der Tat keine Rolle spielt, denn die Skalierung A kann gekürzt werden. Division durch K ergibt

$$\frac{d^2\tilde{y}}{dt^*}\,(t^*) + \frac{B}{\sqrt{KM}}\,\frac{d\tilde{y}}{dt^*}\,(t^*) + \tilde{y}(t^*) \;=\; 0.$$

Die Anfangsbedingung $y(0^+) \;=\; 0$ ist einfach $\tilde{y}(0^+) \;=\; 0$. Die Anfangsbedingung $\frac{dy}{dt}\,(0^+) = \frac{I_0}{M}$ geht wegen $Ay^* = y$ und $\frac{d}{dt}\,y^*(t) = \sqrt{\frac{K}{M}}\,\frac{d}{dt^*}\,\tilde{y}(t^*)$ über in

$$A\sqrt{\frac{K}{M}}\,\frac{d}{dt^*}\,\tilde{y}(0^+) \;=\; \frac{I_0}{M}.$$

Wählen wir jetzt als Längenskala $A := \frac{I_0}{\sqrt{MK}}$, dann ergibt sich die einfache Bedingung

$$\frac{d}{dt^*}\,\tilde{y}(0^+) \;=\; 1.$$

Kehren wir nun zur Bezeichnung $y \leftarrow y^*$, $t \leftarrow t^*$, zurück, dann ergibt sich die entdimensionalisierte Differentialgleichung

$$y''(t) + 2\,\frac{B}{2\sqrt{KM}}\,y'(t) + y(t) \;=\; 0 \tag{4.3.8}$$

$$\left.\begin{aligned} y(0^+) &= 0\\ y'(0^+) &= 1.\end{aligned}\right\} \tag{4.3.9}$$

Der Parameter für die Asymptotik ist nun

$$\epsilon \;:=\; \frac{B}{2\sqrt{MK}}$$

und asymptotisch schwache Dämpfung korrespondiert zu $\epsilon \to 0$.

Wir können uns schnell eine asymptotische Entwicklung der Lösung verschaffen, denn wir kennen mit

$$y(t;\epsilon) \;=\; \frac{e^{-\epsilon t}}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\,\sin\left(\sqrt{1-\epsilon^2}\,t\right)$$

die exakte Lösung von (4.3.8). Für festes t gilt die Taylor-Entwicklung

$$y(t;\epsilon) \;=\; y(t;0) + \epsilon\,\partial_\epsilon y(t;0) + O(\epsilon^2).$$

Wegen

$$\begin{aligned}\partial_\epsilon y(t;\epsilon) \;&=\; -\epsilon t e^{-\epsilon t}(1-\epsilon^2)^{-1}\cos\left(\sqrt{1-\epsilon^2}t\right)\\ &\quad+\left(\epsilon e^{-\epsilon t}(1-\epsilon^2)^{-\frac{3}{2}} - t e^{-\epsilon t}(1-\epsilon^2)^{-\frac{1}{2}}\right)\sin\left(\sqrt{1-\epsilon^2}t\right)\end{aligned}$$

besitzt $y(t;\epsilon)$ die reguläre Entwicklung

$$y(t;\epsilon) \;=\; \sin\, t - \epsilon\, t \sin\, t + O(\epsilon^2). \tag{4.3.10}$$

Diese Entwicklung gilt gleichmäßig, wenn $t \in [0, T_0]$ und $T_0 = O(1)$.

Nun scheint es etwas an der Sache vorbei zu sein, eine Taylor-Entwicklung der exakten Lösung zur Konstruktion einer asymptotischen Entwicklung zu verwenden. In der Tat erhält man die reguläre Entwicklung (4.3.10) auch, wenn man den Ansatz

$$y(t;\epsilon) \;=\; g_1(t) + \epsilon\, g_2(t) + \ldots$$

in die Differentialgleichung

$$y''(t) + 2\epsilon\, y'(t) + y(t) \;=\; 0$$

einsetzt, denn aus $y' = \dot g_1 + \epsilon\, \dot g_2 + \ldots$ und $y'' = \ddot g_1 + \epsilon\, \ddot g_2 + \ldots$ folgt dann

$$\ddot g_1 + \epsilon\, \ddot g_2 + \ldots + 2\epsilon\, \dot g_1 + 2\epsilon^2\, \dot g_2 + \ldots + g_1 + \epsilon\, g_2 + \ldots \;=\; 0.$$

Für die Potenz ϵ^0 ergibt sich

$$\ddot g_1(t) + g_1(t) \;=\; 0,$$

was auf

$$g_1(t) \;=\; \sin\, t$$

führt. Für die Potenz ϵ folgt

$$\ddot g_2(t) + 2\dot g_1(t) + g_2(t) \;=\; 0 \quad\Rightarrow\quad \ddot g_2(t) + g_2(t) \;=\; -2\cos\, t.$$

Diese Teildifferentialgleichung wird gelöst durch

$$g_2(t) \;=\; -t\sin\, t.$$

Damit ergibt sich die Entwicklung (4.3.10).

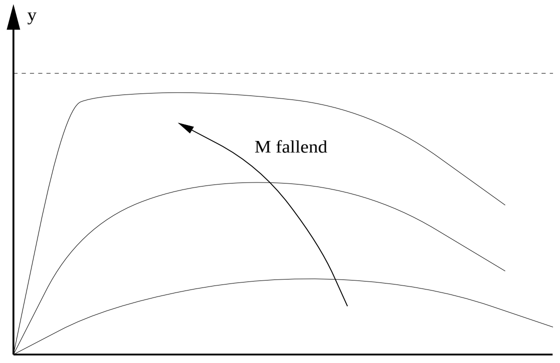


Abbildung 4.6: Verhalten der Lösung für kleines M

4.3.2 Der Fall kleiner Masse

Jetzt wollen wir uns in

$$M\, y''(t) + B\, y'(t) + K\, y(t) \;=\; I_0\, \delta(t)$$

den Fall kleiner Masse ansehen. Hier wird sofort ein Problem evident: Im Limes $M \to 0$ verschwindet die höchste Ableitung und damit kann eine der beiden Anfangsbedingungen nicht mehr erfüllt werden.

Man kann das qualitative Verhalten der Lösung für kleines M wie in Abbildung 4.6 darstellen.

Man kann zeigen, daß die Auslenkung y im Fall $M \to 0$ von $y(0^-) = 0$ auf $y(0^+) = \frac{I_0}{B}$ springt. Im Grenzfall erwarten wir also

$$B\, y'(t) + K\, y(t) \;=\; 0, \quad t > 0 \tag{4.3.11}$$

$$y(0^+) \;=\; \frac{I_0}{B}, \tag{4.3.12}$$

d.h. es verschindet nicht nur eine Anfangsbedingung, sondern die andere springt auch noch. Was geschieht nun genau bei $t = 0$? Intuitiv ist klar, daß die Dämpfung sofort greift (sie ist schließlich proportional zu y'), während die Feder etwas Zeit braucht. Wir würden von $t = 0$ daher ein Verhalten erwarten, wie es durch

$$\begin{aligned} M\, y''(t) + B\, y'(t) &= I_0\, \delta(t) \\ y(0^-) &= 0 \\ y'(0^-) &= 0 \end{aligned}$$

beschrieben wird. Die exakte Lösung dieses Problems lautet

$$y(t) \;=\; \frac{I_0}{B}\left(1 - e^{-\frac{Bt}{M}}\right).$$

Die Lösung fällt für $M \to 0$ also auf einer extrem kleinen Zeitskala ab. Wollen wir daher die Vorgänge nahe $t = 0$ untersuchen, dann benötigen wir eine Technik, die diese extrem kleine Zeitskala dehnt. Wir werden solche Techniken später kennenlernen.

Die exakte Lösung des Problems (4.3.11), daß das Verhalten unseres Systems im Fall $t > 0$ beschreibt, ist gegeben durch

$$y(t) \;=\; \frac{I_0}{B}\, e^{-\frac{K}{B}\,t},$$

und zeigt ein exponentielles Abfallen auf der Zeitskala $\frac{K}{B}\,t$. Führen wir also zur Entdimensionalisierung

$$t^* \;:=\; \frac{K}{B}\,t, \qquad y^* \;=\; \frac{B}{I_0}\,y$$

in die Differentialgleichung

$$M\,y''(t) + B\,y'(t) + K\,y(t) \;=\; 0$$

ein, so folgt analog zu unseren vorhergehenden Berechnungen

$$\begin{aligned} \epsilon\,y''(t) + y'(t) + y(t) &= 0 \\ y(0;\epsilon) &= 0 \\ y'(0;\epsilon) &= \frac{1}{\epsilon}, \end{aligned} \tag{4.3.13}$$

wobei $\epsilon := \frac{MK}{B^2}$ gesetzt wurde. Die exakte Lösung dieses Problems ist gegeben durch

$$y(t;\epsilon) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-4\epsilon}}\left(\exp\left(-\left(1-\sqrt{1-4\epsilon}\right)\frac{t}{2\epsilon}\right) - \exp\left(-\left(1+\sqrt{1-4\epsilon}\right)\frac{t}{2\epsilon}\right)\right).$$

5 Singulär gestörte Probleme

Wir haben bereits im Abschnitt 4.2 gesehen, daß bei einem singulär gestörten Problem weder die innere noch die äußere Entwicklung gleichmäßige Gültigkeit besitzt. In diesem Abschnitt wollen wir anhand der Differentialgleichung des linearen Oszillators (4.3.13) daher die innere und äußere Entwicklung wie auch die Verbindung beider Entwicklungen näher untersuchen.

5.1 Äußere und innere Entwicklung der exakten Lösung

Die äußere Entwicklung erhalten wir, indem wir bei festem $t \neq 0$ den Parameter $\epsilon \to 0$ gehen lassen. Wir führen zunächst eine Ordnungsuntersuchung aller auftretenden ϵ-abhängigen Terme innerhalb der exakten Lösung durch. Mit einer Taylorentwicklung um den Nullpunkt erhalten wir wegen

$$\begin{aligned} f(\epsilon) &:= \sqrt{1-4\epsilon}, \\ f'(\epsilon) &= -2(1-4\epsilon)^{-\frac{1}{2}}, \\ f''(\epsilon) &= -4(1-4\epsilon)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

die Darstellung

$$f(\epsilon) = \sqrt{1-4\epsilon} = 1 - 2\epsilon - 2\epsilon^2 + O(\epsilon^3)$$

und somit

$$\begin{aligned} -\left(1-\sqrt{1-4\epsilon}\right)/2\epsilon &= -1-\epsilon+O(\epsilon^2), \\ -\left(1+\sqrt{1-4\epsilon}\right)/2\epsilon &= -\frac{1}{\epsilon}+1+\epsilon+O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$\frac{1}{\sqrt{1-4\epsilon}} = 1 + 2\epsilon + O(\epsilon^2).$$

Wir schreiben die exakte Lösung unter Verwendung der obigen Ordnungsuntersuchungen in der Form

$$y(t;\epsilon) = (1+2\epsilon+O(\epsilon^2))\left[e^{-t-t\epsilon+O(\epsilon^2)} - e^{-t/\epsilon+t+t\epsilon+O(\epsilon^2)}\right]. \qquad (5.1.1)$$

Der zweite Term innerhalb der eckigen Klammern ist wegen

$$e^{-t/\epsilon+t+t\cdot\epsilon+O(\epsilon^2)} = O(\epsilon^\beta) \quad \forall\, \beta \in \mathbb{R}_0^+$$

laut Definition 1.14 transcendantal small (TST) und wir erhalten mit

$$e^{-t-t\cdot\epsilon+O(\epsilon^2)} = e^{-t}(1-t\epsilon+O(\epsilon^2))$$

die Darstellung

$$\begin{aligned} y(t;\epsilon) &= (1+2\epsilon)\cdot e^{-t}(1-t\epsilon)+O(\epsilon^2) \\ &= e^{-t}+\epsilon(2-t)e^{-t}+O(\epsilon^2). \end{aligned} \qquad (5.1.2)$$

Elementares Nachrechnen zeigt, daß

$$\epsilon y''(t;\epsilon) + y'(t;\epsilon) + y(t;\epsilon) \;=\; O(\epsilon^2)$$

gilt und

$$\tilde{y}(t;\epsilon) \;=\; e^{-t} + \epsilon(2-t)e^{-t} \tag{5.1.3}$$

wie auch nicht weiter verwunderlich die Differentialgleichung für $\epsilon \to 0$ exakt erfüllt.

Bilden wir nun den Grenzübergang $t \to 0$, so erhalten wir

$$\lim_{t\to 0} \tilde{y}(t;\epsilon) \;=\; 1 + 2\epsilon \quad \text{und} \quad \lim_{t\to 0} \tilde{y}'(t,\epsilon) \;=\; -(1+3\epsilon), \tag{5.1.4}$$

womit beide Anfangsbedingungen verletzt werden und damit keine gleichmäßige Gültigkeit der Lösung vorliegt.

Woran liegt es, daß wir mit der beschriebenen Vorgehensweise nur eine äußere Entwicklung aus der exakten Lösung erhalten? Wir haben das Verhalten der exakten Lösung bei festem $t \neq 0$ und $\epsilon \to 0$ untersucht. Hierbei wurde keine Aussage darüber getroffen, wie klein ϵ in Abhängigkeit von t gewählt werden muß, um einen vorgegebenen absoluten Fehler δ zu unterschreiten.

In Abbildung 5.1 haben wir einen möglichen Verlauf von ϵ in Abhängigkeit von t bei festem $\delta > 0$ eingezeichnet.

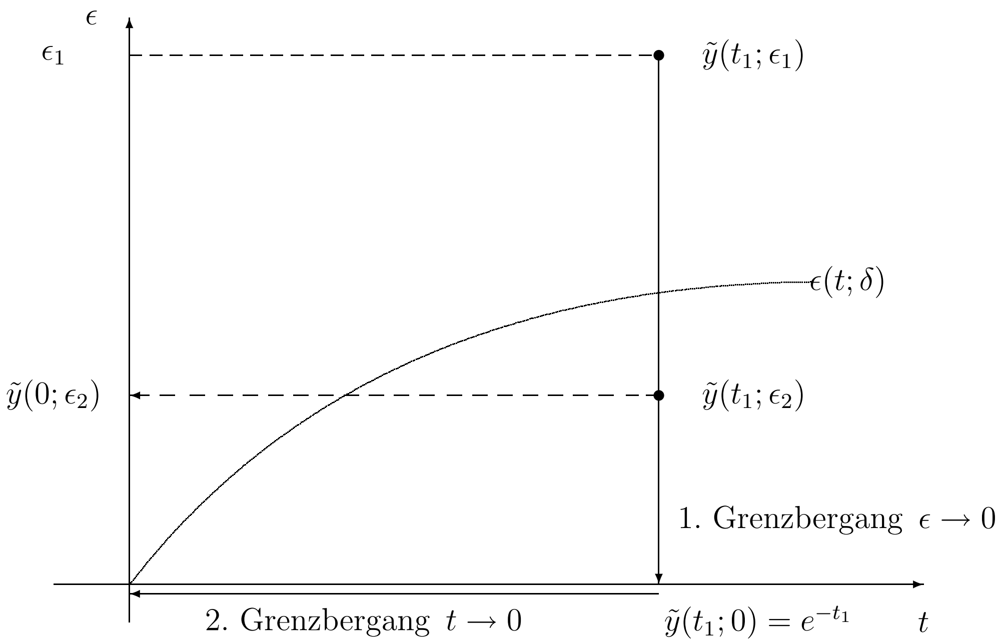


Abbildung 5.1: Grenzübergänge in der (ϵ, t)-Ebene

Eine Parallele zur t-Achse würde auf gleichmäßige Konvergenz und damit auf gleichmäßige Gültigkeit der asymptotischen Entwicklung hindeuten. In unserem Fall haben wir jedoch bereits gesehen, daß $\epsilon(t;\delta)$ einen Verlauf haben muß, der für $t \to 0$ auch $\epsilon \to 0$ (also $\lim_{t\to 0} \epsilon(t;\delta) = 0 \;\forall\, \delta > 0$ fest) fordert.

Halten wir daher wie in (5.1.4) ϵ fest und nehmen den Grenzübergang $t \to 0$ vor (siehe Abb. 5.1, $\tilde{y}(t;\epsilon_2) \to \tilde{y}(0;\epsilon_2)$), so wird der vorliegende Fehler zunehmend größer und wir dürfen keine Konvergenz gegen die exakte Lösung erwarten.

An dieser Stelle könnte der Verdacht aufkommen, daß lediglich zuerst der Grenzübergang $\epsilon \to 0$ und anschließend der Grenzübergang $t \to 0$ durchgeführt werden muß, da wir uns beim 2. Grenzübergang stets unterhalb jeder $\epsilon(t;\delta)$-Kurve befinden. Wird jedoch tatsächlich der Grenzübergang $\epsilon \to 0$ durchgeführt, so geht die Differentialgleichung 2. Ordnung in eine Differentialgleichung 1. Ordnung über. Somit kann bei 2 Anfangsbedingungen ein überbestimmtes System vorliegen.

Wir müssen uns daher zur Berechnung einer inneren Entwicklung innerhalb der (ϵ, t)-Ebene derart dem Nullpunkt nähern, daß wir uns mindestens weder auf der ϵ- noch auf der t-Achse bewegen. Diese Vorgehensweise haben wir mittels der Transformation

$$t \to t^* = \frac{t}{\epsilon}$$

und dem für festes $t^* \neq \infty$ durchgeführten Grenzübergang $\epsilon \to 0$ bereits mehrfach zur Ermittlung einer inneren Entwicklung vollzogen. Dieser Ansatz entspricht einer Annäherung des Nullpunktes in der (ϵ, t)-Ebene entlang einer Gerade mit der Steitung $1/t^*$.

Bemerkung 5.1.
Bei der Transformation kann eine beliebige Abbildung

$$t \to t^* = \frac{t}{\eta(\epsilon)}$$

genutzt werden. Erst die genaue Gestalt der Differentialgleichung und deren Anfangs- und Randbedingungen legen die Funktion η fest.

Betrachten wir die Darstellung der Lösung (5.1.1) näher, so erkennen wir, daß der Term $e^{-t/\epsilon}$ in der weiteren Berechnung vernachlässigt wurde, da für festes $t \neq 0$, $e^{-t/\epsilon} = \mathrm{TST}$ für $\epsilon \to 0$ gilt.

Mit $t^* = \frac{t}{\epsilon}$ folgt jedoch

1) $\lim\limits_{t\to 0} \lim\limits_{\epsilon\to 0} e^{-t/\epsilon} = 0$

2) $\lim\limits_{\epsilon\to 0} \lim\limits_{t\to 0} e^{-t/\epsilon} = 1$

3) $\lim\limits_{\substack{\epsilon\to 0 \\ t^*\neq\infty \text{ fest}}} e^{-t/\epsilon} = e^{-t^*} \quad \left(= \lim\limits_{\substack{t\to 0 \\ t^*\neq\infty \text{ fest}}} e^{-t/\epsilon}\right).$

In unserem (ϵ, t)-Diagramm erhalten wir also unendlich viele verschiedene Grenzwerte in Abhängigkeit von der betrachteten Richtung aus der wir uns dem Nullpunkt nähern. Abbildung 5.2 zeigt die zu 1)-3) gehörenden Wege in der (ϵ, t)-Ebene.

In der Funktionentheorie bezeichnen wir solche Punkte als wesentliche Singularitäten. Der Satz von Casorati-Weierstraß charakterisiert das Verhalten komplexwertiger Funktionen in der Nähe wesentlicher Singularitäten in der komplexen Zahlenebene mit der

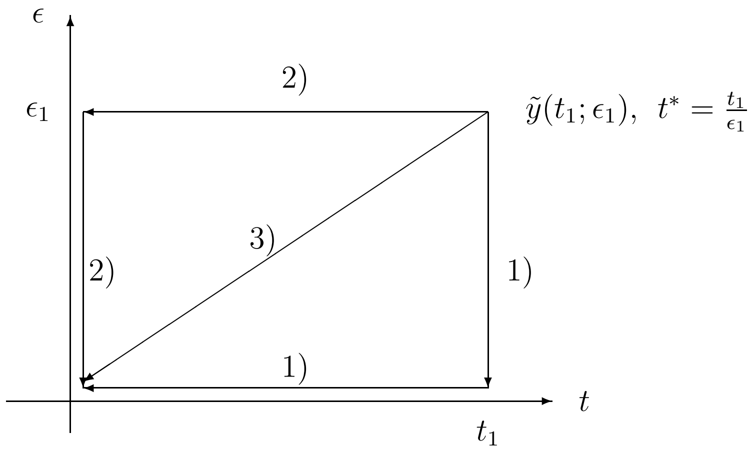


Abbildung 5.2: Darstellung der Grenzübergänge in der (ϵ, t)-Ebene

Aussage, daß eine komplexwerte Funktion in jeder beliebigen (offenen) Umgebung der wesentlichen Singularität jede komplexe Zahl annimmt.

Zur Ermittlung der inneren Entwicklung nehmen wir mit $t^* = \frac{t}{\epsilon}$ die mittlerweile übliche Skalierung der Zeitskala vor und erhalten aus (4.3.13) die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^{*2}} + \frac{dy}{dt^*} + \epsilon y \;=\; 0 \tag{5.1.5}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0;\epsilon) \;=\; 0, \qquad \frac{dy}{dt^*}(0;\epsilon) \;=\; 1. \tag{5.1.6}$$

Hierbei wurde wiederum der Parameter ϵ vor der höchsten Ableitung eliminiert. Aus (5.1.1) erhalten wir

$$\begin{aligned} y(t^*;\epsilon) &= (1 + 2\epsilon + O(\epsilon^2)) \cdot \left[e^{-\epsilon t^* + O(\epsilon^2)} - e^{-t^* - \epsilon t^* + O(\epsilon^2)}\right] \\ &= (1 + 2\epsilon)\left[1 - \epsilon t^* + O(\epsilon^2) - e^{-t^*}(1 + \epsilon t^* + O(\epsilon^2))\right] \\ &= (1 - e^{t^*}) + \epsilon(2 - t^* - (2 + t^*)e^{-t^*}) + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Einfaches Nachrechnen zeigt, daß

$$\overline{y}(t^*;\epsilon) \;=\; (1 - e^{-t^*}) + \epsilon\left(2 - t^* - (2 + t^*)e^{-t^*}\right) \tag{5.1.7}$$

die Differentialgleichung (5.1.5) bis auf einen Fehler der Ordnung $O(\epsilon^2)$ löst und zudem mit

$$\overline{y}(0;\epsilon) \;=\; 0$$

und

$$\overline{y}'(0;\epsilon) \;=\; 1$$

die Anfangsbedingungen (5.1.6) für alle ϵ erfüllt. Jedoch zeigt auch diese innere Entwicklung keine gleichmäßige Gültigkeit für $t^* \to \infty$, da die Funktion

$$u_1(t^*) \ = \ 2 - t^* - (2 + t^*)e^{-t^*}$$

für $t^* \ \to \ \infty$ unbeschränkt ist. Wir haben mit $\tilde{y}$ eine äußeren Entwicklung, die gleichmäßig gültig für $t \to \infty$ ist und mit $\overline{y}$ eine innere Entwicklung vorliegen.

Ziel der folenden Abschnitte ist die Herleitung einer geeigneten Kopplung beider Entwicklungen, um eine gleichmäßig gültige asymptotische Entwicklung auf ganz $\mathbb{R}_0^+$ zu erhalten.

5.2 Erweiterter Gültigkeitsbereich der äußeren Entwicklung

Zunächst schreiben wir die äußere asymptotische Entwicklung (5.1.3) unter Verwendung der Funktionen

$$\tilde{y}_1(t) \;=\; e^{-t} \tag{5.2.1}$$

und

$$\tilde{y}_2(t) \;=\; (2-t)e^{-t} \tag{5.2.2}$$

in der Form

$$\tilde{y}(t;\epsilon) \;=\; \tilde{y}_1(t) + \epsilon\cdot\tilde{y}_2(t). \tag{5.2.3}$$

Die Darstellung der äußeren asymptotischen Entwicklung haben wir direkt von der exakten Lösung $y(t;\epsilon)$ laut Gleichung (5.1.2) abgelesen. Die Vorgehensweise stimmt inhaltlich mit der in Abschnitt 3.1 gegebenen Darstellung (3.1.1) überein, in dem wir

$$\tilde{y}_1(t) \;=\; \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ t\neq 0 \text{ fest}}} y(t;\epsilon)$$

und

$$\tilde{y}_2(t) \;=\; \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ t\neq 0 \text{ fest}}} \frac{y(t;\epsilon)-\tilde{y}_1(t)}{\epsilon}$$

durchführen.

Ziel dieses Abschnitts ist die genaue Untersuchung der Frage: Inwieweit darf die starke Restriktion $t\neq 0$ fest bei der Berechnung der äußeren Entwicklung aufgelockert werden?

Wie bereits in Bemerkung 5.1 angedeutet, schreiben wir hierzu

$$t \;=\; t(\epsilon) \;=\; \eta(\epsilon)t_\eta \tag{5.2.4}$$

mit einem festen aber beliebigen $t_\eta > 0$ und einer nicht negativen Funktion η. Ausgehend von der exakten Lösung (5.1.1) und der Funktion $\tilde{y}_1$ (siehe (5.2.1)) liegt mit

$$\tilde{y}_1(\eta(\epsilon)t_\eta) \;=\; e^{-\eta(\epsilon)t_\eta}$$

eine 1-term asymptotische äußere Entwicklung von $y(\eta(\epsilon)t_\eta;\epsilon)$ vor, falls

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ t_\eta>0 \text{ fest}}} y(\eta(\epsilon);\epsilon) - \tilde{y}_1(\eta(\epsilon)t_\eta) \;=\; 0 \tag{5.2.5}$$

gilt. Es gilt

$$\begin{aligned}
& y(\eta(\epsilon)t_\eta;\epsilon) - \tilde{y}(\eta(\epsilon)t_\eta) \\
=\;& (1+O(\epsilon))\cdot\left[e^{-\eta(\epsilon)t_\eta-\epsilon\eta(\epsilon)t_\eta+O(\epsilon^2\eta(\epsilon))} - e^{-\frac{\eta(\epsilon)}{\epsilon}\,t_\eta+\eta(\epsilon)t_\eta+O(\epsilon\cdot\eta(\epsilon))}\right] - e^{-\eta(\epsilon)t_\eta} \\
=\;& e^{-\eta(\epsilon)t_\eta}\cdot\left[e^{-\epsilon\eta(\epsilon)t_\eta+O(\epsilon^2\eta(\epsilon))}-1\right] + O(\epsilon)\cdot\left[e^{-\eta(\epsilon)t_\eta-\epsilon\eta(\epsilon)t_\eta+O(\epsilon^2\eta(\epsilon))}\right] \\
& +(1+O(\epsilon))\left[-e^{-\frac{\eta(\epsilon)}{\epsilon}\,t_\eta+\eta(\epsilon)t_\eta+O(\epsilon\cdot\eta(\epsilon))}\right],
\end{aligned}$$

so daß die Forderung (5.2.5) erfüllt ist, wenn $\eta(\epsilon)$ die Bedingungen

$$\begin{aligned}
1)\quad & e^{-\eta(\epsilon)t_\eta}\left[e^{-\epsilon\eta(\epsilon)t_\eta+O(\epsilon^2\eta(\epsilon))}-1\right] &=&\; o(1), \quad \epsilon\to 0\\
2)\quad & e^{-\eta(\epsilon)t_\eta-\epsilon\eta(\epsilon)t_\eta+O(\epsilon^2\eta(\epsilon))} &=&\; O(1), \quad \epsilon\to 0\\
3)\quad & e^{-\frac{\eta(\epsilon)}{\epsilon}t_\eta+\eta(\epsilon)t_\eta+O(\epsilon\eta(\epsilon))} &=&\; \mathrm{TST}, \quad \epsilon\to 0
\end{aligned}$$

erfüllt.

Bemerkung 5.2.
Die dritte Forderung erscheint zum jetzigen Zeitpunkt zu restriktiv zu sein, da anstelle der Forderung „TST“ auch „ $o(1)$ “ der Bedingung (5.2.5) genügt. Da der Term

$$e^{-\frac{\eta(\epsilon)}{\epsilon}t_\eta+\eta(\epsilon)t_\eta+O(\epsilon\eta(\epsilon))}$$

auch bei der Berechnung weiterer Funktionen $\tilde{y}_n(\eta(\epsilon)t_\eta)$ vernachlässigt werden soll, muß die Bedingung 3) in der angegebenen Form gestellt werden.

Direktes Einsetzen zeigt, daß mit

$$\eta(\epsilon) \;=\; O_s(1), \quad \epsilon\to 0$$

die Bedingungen 1) und 2) erfüllt sind. Zudem darf die Funktion $\eta(\epsilon)$ für $\epsilon\to 0$ nicht zu schnell gegen Null konvergieren, um die Forderung 3) nicht zu verletzen. Setzen wir

$$\eta(\epsilon) \;=\; \epsilon\cdot|\log\epsilon|,$$

dann folgt für $\epsilon<1$

$$e^{-\frac{\eta(\epsilon)}{\epsilon}\cdot t_\eta} \;=\; e^{t_\eta\log\epsilon} \;=\; \epsilon^{t_\eta}.$$

Da $t_\eta>0$ beliebig vorgegeben wurde, verschwindet der Term $e^{-\frac{\eta(\epsilon)}{\epsilon}t_\eta}$ für $\epsilon\to 0$, erfüllt jedoch nicht die TST-Bedingung. Mit

$$\eta(\epsilon)\gg\epsilon\cdot|\log\epsilon|, \quad \epsilon\to 0$$

folgt für $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\eta(\epsilon)}{\epsilon|\log\epsilon|\alpha} \;=\; 0\\
\Rightarrow\quad & e^{-\frac{\eta(\epsilon)}{\epsilon}t_\eta} \ll e^{-\alpha\epsilon|\log\epsilon|} \overset{0<\epsilon<1}{=} \epsilon^{\alpha t_\eta}\\
\Rightarrow\quad & e^{-\frac{\eta(\epsilon)}{\epsilon}t_\eta} \ll \epsilon^\beta \quad \forall\beta\in\mathbb{R}\backslash\{0\}\\
\Rightarrow\quad & e^{-\frac{\eta(\epsilon)}{\epsilon}t_\eta} \ll \epsilon^\beta \quad \forall\beta\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

und somit

$$e^{-\frac{\eta(\epsilon)}{\epsilon}t_\eta+\eta(\epsilon)t_\eta+O(\epsilon\eta(\epsilon))} \;=\; \mathrm{TST}, \quad \epsilon\to 0.$$

Der erweiterte Gültigkeitsbereich der Funktion $\tilde{y}_1(\eta(\epsilon)t_\eta)$ ist durch

$$\epsilon|\log\epsilon|\ll\eta(\epsilon) \;=\; O(1), \quad \epsilon\to 0 \tag{5.2.6}$$

gegeben.

Definition 5.3.
Seien f und g zwei Funktionen und $\epsilon_0 \in \mathbb{R}$ gegeben, so schreiben wir

$$f(\epsilon) \underline{\ll} g(\epsilon), \quad \epsilon \to \epsilon_0,$$

falls

$$f(\epsilon) \ll g(\epsilon), \quad \epsilon \to \epsilon_0,$$

oder

$$f = O_s(g), \quad \epsilon \to \epsilon_0$$

gilt.

Unter Verwendung der Definition 5.3 läßt sich der erweiterte Gültigkeitsbereich auch in der Form

$$\epsilon|\log\epsilon| \ll \eta(\epsilon) \underline{\ll} 1, \quad \epsilon \to 0 \tag{5.2.7}$$

schreiben.

Eine graphische Darstellung des Gültigkeitsbereiches in der (ϵ, t)-Ebene liefert die Abbildung 5.3.

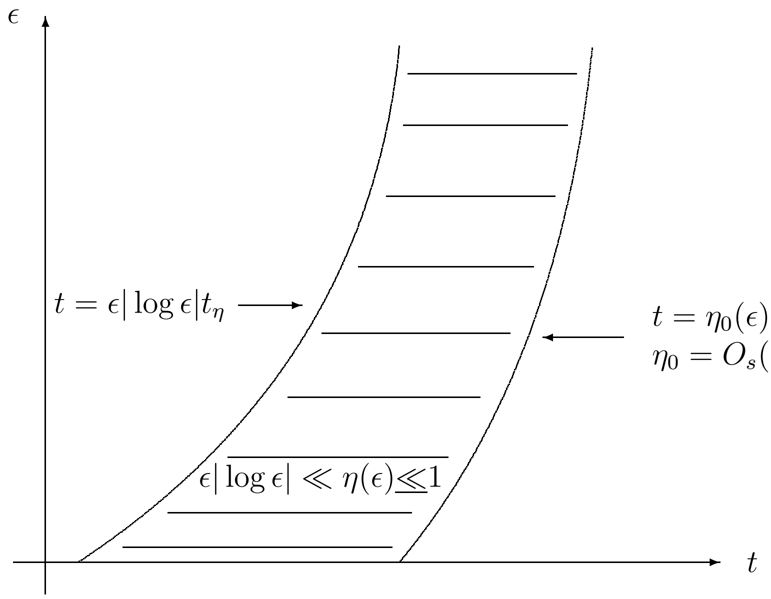


Abbildung 5.3: Erweiteter Gültigkeitsbereich der äußeren Entwicklung

Mit (5.2.7) ist zunächst der Gültigkeitsbereich der äußeren Eintermentwicklung angegeben. Analog zur Gleichung (5.2.5) liegt mit (5.2.3) eine Zweitermentwicklung vor, falls

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ t_\eta>0 \text{ fest}}} \frac{y(\eta(\epsilon)t_\eta;\epsilon) - \tilde{y}(\eta(\epsilon)t_\eta;\epsilon)}{\epsilon} = 0 \tag{5.2.8}$$

gilt.

Aus der Umformulierung

$$
\begin{aligned}
& y(\eta(\epsilon)t_\eta;\epsilon) - \tilde{y}(\eta(\epsilon)t_\eta;\epsilon) \\
&= (1+2\epsilon+O(\epsilon^2))\left[e^{-\eta(\epsilon)t_\eta-\epsilon\eta(\epsilon)t_\eta+O(\epsilon^2\eta(\epsilon))} - e^{-\frac{\eta(\epsilon)}{\epsilon}t_\eta+\eta(\epsilon)t_\eta+O(\epsilon\eta(\epsilon))}\right] \\
&\quad -e^{-\eta(\epsilon)t_\eta} - \epsilon(2-\eta(\epsilon)t_\eta)e^{-\eta(\epsilon)t_\eta} \\
&= (1+2\epsilon)e^{-\eta(\epsilon)t_\eta}\left(e^{-\epsilon\eta(\epsilon)t_\eta+O(\epsilon^2\eta(\epsilon))} - 1 + \epsilon\eta(\epsilon)t_\eta\right) - 2\epsilon^2\eta(\epsilon)t_\eta e^{-\eta(\epsilon)t_\eta} \\
&\quad +O(\epsilon^2)e^{-\eta(\epsilon)t_\eta-\epsilon\eta(\epsilon)t_\eta+O(\epsilon^2\eta(\epsilon))} - (1+2\epsilon+O(\epsilon^2))e^{-\frac{\eta(\epsilon)}{\epsilon}-\eta(\epsilon)t_\eta+O(\epsilon\eta(\epsilon))}
\end{aligned}
$$

wird ersichtlich, daß die Forderung (5.2.8) erfüllt ist, wenn $\eta(\epsilon)$ den Bedingungen

$$
\begin{aligned}
&1) \quad e^{-\eta(\epsilon)t_\eta}\left(e^{-\epsilon\eta(\epsilon)t_\eta+O(\epsilon^2\eta(\epsilon))} - 1 + \epsilon\eta(\epsilon)t_\eta\right) &&= o(\epsilon), \quad \epsilon\to 0 \\
&2) \quad \eta(\epsilon)t_\eta e^{-\eta(\epsilon)t_\eta} &&= O(1), \quad \epsilon\to 0 \\
&3) \quad e^{-\eta(\epsilon)t_\eta-\epsilon\eta(\epsilon)t_\eta+O(\epsilon^2\eta(\epsilon))} &&= O(1), \quad \epsilon\to 0 \\
&4) \quad e^{-\frac{\eta(\epsilon)}{\epsilon}-\eta(\epsilon)t_\eta+O(\epsilon^2\eta(\epsilon))} &&= \mathrm{TST}, \quad \epsilon\to 0
\end{aligned}
$$

genügt. Mit

$$\epsilon\cdot|\log\epsilon| \ll \eta(\epsilon), \quad \epsilon\to 0$$

ist die vierte Bedingung erfüllt, so daß wir mit einer Taylorentwicklung

$$e^{-\epsilon\eta(\epsilon)t_\eta+O(\epsilon^2\eta(\epsilon))} - 1 + \epsilon\eta(\epsilon)t_\eta = O(\epsilon^2\eta^2(\epsilon)) + O(\epsilon^2\eta(\epsilon))$$

erhalten, wodurch der erweiterte Gültigkeitsbereich der Zweitermentwicklung analog zur Eintermentwicklung durch

$$\epsilon\cdot|\log\epsilon| \ll \eta(\epsilon) \underline{\ll} 1, \quad \epsilon\to 0$$

gegeben ist.

5.3 Erweiterter Gültigkeitsbereich der inneren Entwicklung

Unter Verwendung der Funktionen

$$\overline{y}_1(t^*) \;=\; 1 - e^{-t^*} \tag{5.3.1}$$

und

$$\overline{y}_2(t^*) \;=\; 2 - t^* - (2 + t^*)e^{-t^*} \tag{5.3.2}$$

läßt sich die innere Entwicklung (5.1.7) in der Form

$$\overline{y}(t^*;\epsilon) \;=\; \overline{y}_1(t^*) + \epsilon\overline{y}_2(t^*) \tag{5.3.3}$$

schreiben. Die Funktionen $\overline{y}_1$ und $\overline{y}_2$ ergaben sich aus der exakten Lösung $y(t;\epsilon)$ (siehe (5.1.1)) unter Ausnutzung der Transformation $t^* = t/\epsilon$ mittels der Grenzwertprozesse

$$\overline{y}_1(t^*) \;=\; \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ t^*\neq\infty \text{ fest}}} y(\epsilon t^*;\epsilon)$$

und

$$\overline{y}_2(t^*) \;=\; \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ t^*\neq\infty \text{ fest}}} \frac{y(\epsilon t^*;\epsilon) - \overline{y}_1(t^*)}{\epsilon}.$$

Um nachzuweisen, daß auch die innere Entwicklung einen größeren Gültigkeitsbereich besitzt, nutzen wir analog zu (5.2.4) eine Transformation

$$t \;=\; t(\epsilon) \;=\; \eta(\epsilon)t_\eta,$$

wobei diesmal $\eta(\epsilon) \geq 0$ und t_η eine feste Zahl $0 \leq t_\eta < \infty$ darstellt.

Da $t^* = \eta(\epsilon)t_\eta/\epsilon$ gilt, suchen wir somit nach Bedingungen an die Funktion $\eta(\epsilon)$, so daß

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ t_\eta\neq 0 \text{ fest}}} y(\eta(\epsilon)t_\eta;\epsilon) - \overline{y}_1(\eta(\epsilon)t_\eta/\epsilon) \;=\; 0 \tag{5.3.4}$$

für die Eintermentwicklung und zusätzlich

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ t_\eta\neq\infty \text{ fest}}} \frac{y(\eta(\epsilon)t_\eta;\epsilon) - \overline{y}_1\left(\frac{\eta(\epsilon)t_\eta}{\epsilon}\right) - \epsilon\overline{y}_2\left(\frac{\eta(\epsilon)t_\eta}{\epsilon}\right)}{\epsilon} \;=\; 0 \tag{5.3.5}$$

für die Zweiermentwicklung gilt.

Betrachten wir zunächst die Eintermentwicklung. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
&y(\eta(\epsilon)t_\eta;\epsilon) - \overline{y}_1\left(\frac{\eta(\epsilon)t_\eta}{\epsilon}\right)\\
&= \;(1+O(\epsilon))\left[e^{-\eta(\epsilon)t_\eta - \epsilon\eta(\epsilon)t_\eta + O(\epsilon^2\eta(\epsilon))} - e^{-\frac{\eta(\epsilon)t_\eta}{\epsilon} + \eta(\epsilon)t_\eta + O(\epsilon\eta(\epsilon))}\right] - 1 + e^{-\frac{\eta(\epsilon)t_\eta}{\epsilon}}\\
&= \;e^{-\eta(\epsilon)t_\eta - \epsilon\eta(\epsilon)t_\eta + O(\epsilon^2\eta(\epsilon))} - 1 + e^{-\frac{\eta(\epsilon)t_\eta}{\epsilon}}\left(-e^{\eta(\epsilon)t_\eta + O(\epsilon\eta(\epsilon))} + 1\right)\\
&\quad +O(\epsilon)\left[e^{-\eta(\epsilon)t_\eta - \epsilon\eta(\epsilon)t_\eta + O(\epsilon^2\eta(\epsilon))} - e^{-\frac{\eta(\epsilon)t_\eta}{\epsilon} + \eta(\epsilon)t_\eta + O(\epsilon\eta(\epsilon))}\right],
\end{aligned}$$

so daß die Bedingung (5.3.4) erfüllt ist, falls

$$
\begin{aligned}
&1) \quad e^{-\eta(\epsilon)t_\eta - \epsilon\eta(\epsilon)t_\eta + O(\epsilon^2\eta(\epsilon))} - 1 &&= o(1), \quad \epsilon \to 0\\
&2) \quad e^{\eta(\epsilon)t_\eta + O(\epsilon\eta(\epsilon))} - 1 &&= o(1), \quad \epsilon \to 0\\
&3) \quad e^{-\frac{\eta(\epsilon)}{\epsilon}t_\eta} &&= O(1), \quad \epsilon \to 0
\end{aligned}
$$

gilt. Somit liegt mit

$$\epsilon \underline{\ll} \eta(\epsilon) \ll 1 \tag{5.3.6}$$

ein erweiterter Gültigkeitsbereich der Eintermentwicklung vor. Zur Bestimmung des erweiterten Gültigkeitsbereiches betrachten wir die Taylorentwicklung für hinreichend kleine η und ϵ

$$e^{\pm\eta(\epsilon)t_\eta + O(\epsilon\eta(\epsilon))} = 1 \pm \eta(\epsilon)t_\eta + O(\epsilon\eta(\epsilon)) + O(\eta^2(\epsilon)).$$

Somit folgt unter Berücksichtigung von (5.3.6)

$$
\begin{aligned}
\frac{y(\eta(\epsilon)t_\eta;\epsilon)}{\epsilon} &= \frac{1}{\epsilon} - \frac{\eta(\epsilon)}{\epsilon}\,t_\eta + O(\eta(\epsilon)) + O\left(\frac{\eta^2(\epsilon)}{\epsilon}\right)\\
&\quad +2 + O(\eta(\epsilon)) + O(\epsilon)\\
&\quad -e^{-\frac{\eta(\epsilon)t_\eta}{\epsilon}}\left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{\eta(\epsilon)}{\epsilon}\,t_\eta + 2\right)\\
&= \frac{1}{\epsilon}\left[\underbrace{1 - e^{-\frac{\eta(\epsilon)t_\eta}{\epsilon}}}_{=\overline{y}_1\left(\frac{\eta(\epsilon)t_\eta}{\epsilon}\right)} + \epsilon\underbrace{\left(2 - \frac{\eta(\epsilon)t_\eta}{\epsilon} - \left(2 + \frac{\eta(\epsilon)t_\eta}{\epsilon}\right)e^{-\frac{\eta(\epsilon)t_\eta}{\epsilon}}\right)}_{=\overline{y}_2\left(\frac{\eta(\epsilon)t_\eta}{\epsilon}\right)}\right]\\
&\quad +O(\eta(\epsilon)) + O\left(\frac{\eta^2(\epsilon)}{\epsilon}\right) + O(\epsilon).
\end{aligned}
$$

Fordern wir somit neben der Bedingung (5.3.6) zusätzlich

$$\eta(\epsilon) \ll \epsilon^{1/2},$$

so liegt mit

$$\overline{y}_1\left(\frac{\eta(\epsilon)t_\eta}{\epsilon}\right) + \epsilon\overline{y}_2\left(\frac{\eta(\epsilon)t_\eta}{\epsilon}\right)$$

eine innere Zweitermentwicklung vor. Der erweiterte Gültigkeitsbereich der inneren Zweitermentwicklung

$$\epsilon \underline{\ll} \eta(\epsilon) \ll \epsilon^{1/2}$$

ist in Abbildung 5.4 dargestellt.

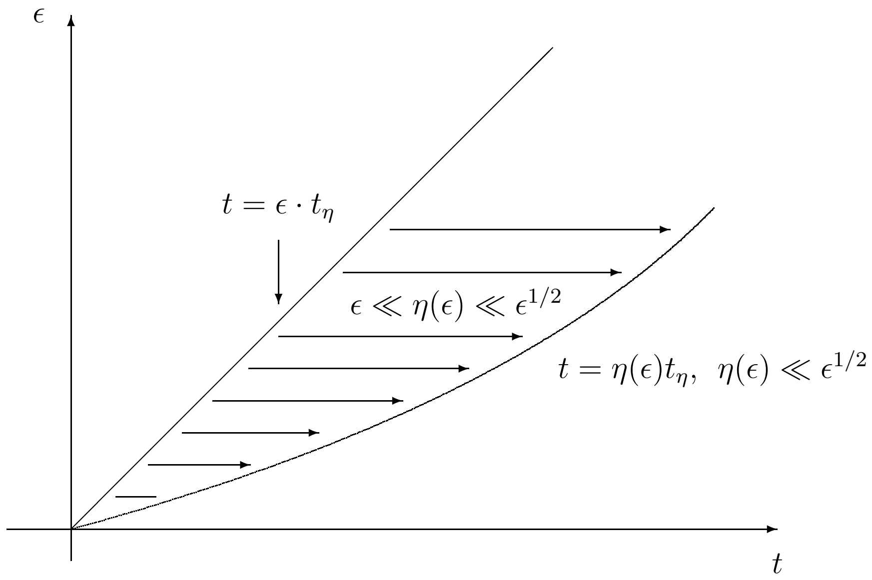


Abbildung 5.4: Erweiterter Gültigkeitsbereich der inneren Zweitermentwicklung

5.4 Gemeinsamer Gültigkeitsbereich der äußeren und inneren Entwicklungen

Um in den folgenden Abschnitten genaue Vorschriften zur Verbindung der äußeren und inneren Entwicklung geben zu können, wollen wir zunächst untersuchen in welchen Bereichen die Kopplung stattfinden muß. Der gemeinsame Gültigkeitsbereich der Eintermentwicklung ist durch

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ 0<t_\eta<\infty \text{ fest}}} \tilde{y}_1(\eta(\epsilon)t_\eta) - \overline{y}_1\left(\frac{\eta(\epsilon)t_\eta}{\epsilon}\right) \;=\; 0$$

gegeben und lautet somit

$$\epsilon|\log\epsilon| \;\ll\; \eta(\epsilon) \;\ll\; 1.$$

Für die Zweitermentwicklung gilt analog

$$\lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ 0<t_\eta<\infty \text{ fest}}} \frac{\overline{y}_1(\eta(\epsilon)t_\eta) + \epsilon\tilde{y}_2(\eta(\epsilon)t_\eta) - \overline{y}_1\left(\frac{\eta(\epsilon)t_\eta}{\epsilon}\right) - \epsilon\overline{y}_2\left(\frac{\eta(\epsilon)t_\eta}{\epsilon}\right)}{\epsilon} \;=\; 0,$$

wodurch

$$\epsilon|\log\epsilon| \;\ll\; \eta(\epsilon) \;\ll\; \epsilon^{1/2}$$

folgt.

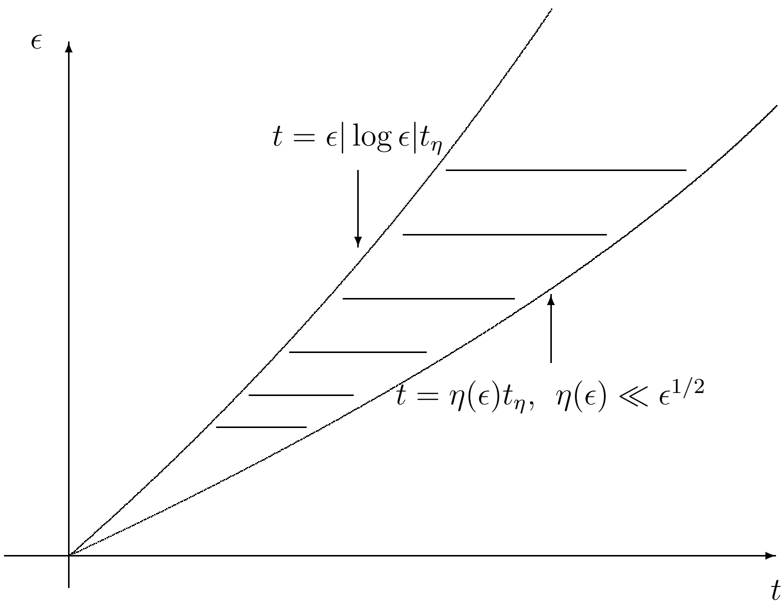
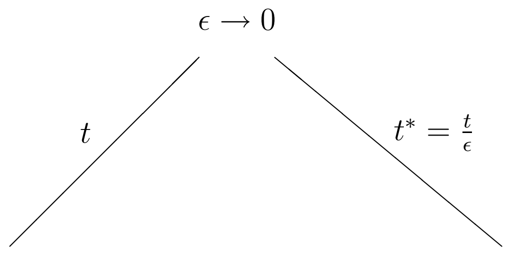


Abbildung 5.5: Gemeinsamer Gültigkeitsbereich der inneren und äußeren Zweitermentwicklungen

5.5 Äußere, innere, primäre und sekundäre Entwicklungen

Kehren wir noch einmal zurück zu unserem Beispiel der linearen Schwingung im Fall kleiner Masse. Dort bot sich folgendens Bild:



Äuere Entwicklung $\epsilon \to 0$ und t fest
Gültig für $\frac{1}{t} = O(1)$, d.h. nicht bei $t = 0$
t heit **äuere Koordinate**

Innere Entwicklung $\epsilon \to 0$ und t^* fest
Gültig für $t^* = O(1)$ bzw. $t = O(\epsilon)$, d.h. bei $t = 0$
t^* heit **innere Koordinate**

Dabei ist die äuere Entwicklung nicht unabhängig von der inneren, denn sie wird zeitlich nach der inneren Entwicklung gültig. Die innere Entwicklung ist dagegen (zumindest in erster Näherung) unabhängig von der äueren. Diese Überlegung motiviert

Definition 5.4.
Diejenige Entwicklung (innere/äuere), die von der anderen in erster Näherung unabhängig ist, heit **primäre Entwicklung**, die andere heit **sekundäre Entwicklung**.

Eine äuere Entwicklung kann also ebenso wie eine innere die Rolle der primären und auch der sekundären Entwicklung einnehmen.

5.6 Anpassungsvorschriften

Wir wollen primäre und sekundäre Entwicklung so aneinander anpassen, da eine global definierte Lösung unseres Problems entsteht. Dazu ist eine unumgängliche Voraussetzung zu erfüllen.

Voraussetzung: Zwischen dem Gültigkeitsbereich der primären Entwicklung und dem Gültigkeitsbereich der sekundären Entwicklung existiert ein Überlappungsbereich, in dem primäre und sekundäre Entwicklung für $\epsilon \to 0$ gegen dieselbe Lösung streben.

In unserem Paradebeispiel der linearen Schwingung mit kleiner Masse war

$$y(t;\epsilon) \;=\; e^{-t} + \epsilon(2-t)e^{-t}$$

die äuere, und

$$y(t^*;\epsilon) \;=\; \left(1 - e^{-t^*}\right) + \epsilon\left(2 - t^* - (2+t^*)e^{-t^*}\right), \quad t^* = \frac{t}{\epsilon},$$

die innere Entwicklung. Hier ist die innere Entwicklung die primäre, denn sie ist (für kleine Zeiten) von der äueren Entwicklung unabhängig, während die äuere Entwicklung erst an die innere angeflickt werden muß.

Der Parameter der primären Entwicklung ist t, derjenige der sekundären Entwicklung $\frac{t}{\epsilon}$. Für den Überlappungsbereich mu demnach ein Parameter zwischen t und $\frac{t}{\epsilon}$ gefunden werden, etwa

$$t_\eta \;:=\; \frac{t}{\eta(\epsilon)}$$

mit $\eta(\epsilon) = \epsilon^\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Jetzt formulieren wir unser

Ziel: In einem endlichen t_η-Intervall sollen primäre und sekundäre Lösungen für $\epsilon \to 0$ gegen dieselbe Funktion streben.

Dieses Ziel lät sich (erst mal formal!) wie folgt erreichen:

Durchführung: Entwickle primäre und sekundäre Entwicklung bei festem t_η nach Potenzen von ϵ und gleiche Terme gegenseitig ab. Die resultierende Entwicklung heit **Zwischenentwicklung**.

Diese formale Beschreibung führt auf die

Erste Anpassungsvorschrift: Die Zwischenentwicklungen von primärer und sekundärer Entwicklung müssen übereinstimmen.

Genau diese Übereinstimmung wird natürlich durch den geforderten Abgleich der Terme gleicher ϵ-Potenz gewährleistet. Genau diese Notwendigkeit des Abgleichs macht es aber auch erforderlich, da in primärer und sekundärer Entwicklung vom gleichen Limes $(\epsilon \to 0)$ ausgegangen wird. Ganz allgemein kann man niemals zwei verschiedene Entwicklungen (eine für $\epsilon \to 0$, eine für $\epsilon \to \infty)$ im Sinne unserer asymptotischen Entwicklungen aneinander anpassen!

Die Zwischenentwicklung ist ein lästiges Vehikel und van Dyke hat 1975 einen Weg angegeben, wie man sie vollständig vermeiden kann.

5.6.1 Eine asymptotische Anpassungsvorschrift nach van Dyke

Die van Dykesche Vorschrift lautet

> Die primäre Entwicklung der sekundären Entwicklung mu mit der sekundären Entwicklung der primären Entwicklung übereinstimmen.

Es bezeichne $y_p^{(k)}$ die k-Term Primär- und $y_s^{(k)}$ die k-Term Sekundärentwicklung. Im Beispiel der linearen Schwingung also

$$\begin{aligned} y_p^{(1)} &= \left(1 - e^{-t^*}\right), \qquad & y_p^{(2)} &= \epsilon\left(2 - t^* - (2+t^*)e^{-t^*}\right) \\ y_s^{(1)} &= e^{-t}, & y_s^{(2)} &= \epsilon(2-t)e^{-t}. \end{aligned}$$

Die van Dyksche Regel wollen wir dann in der Form

$$\left[y_p^{(n)}\right]_s^{(m)} = \left[y_s^{(m)}\right]_p^{(n)}, \qquad n, m = 1, 2, 3, \ldots$$

schreiben. Dann geht man wie folgt vor.

(1) Eingliedrige sekundäre Entwicklung an eingliedrige primäre Entwicklung anpassen $(n = m = 1)$.

(2) Zweigliedrige primäre Entwicklung an eingliedrige sekundäre Entwicklung anpassen $(n = 2, m = 1)$. (Es können Rückwirkungen der sekundären Entwicklung auftreten (sog. Sekundäreffekte), die in der primären Entwicklung berücksichtigt werden müssen.)

(3) $n = 2, m = 2$

(4) $n = 3, m = 2$ (Analog zu Schritt (2))
usw.

Der Anpassungsproze verläuft also nach folgendem Schema:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{y_p^{(1)}} \arrow[d, "(1)"'] & & \boxed{y_p^{(2)}} \arrow[d, "(3)"'] & & \boxed{y_p^{(3)}} \arrow[d] \\
\boxed{y_s^{(1)}} \arrow[urr, "(2)"] & & \boxed{y_s^{(2)}} \arrow[urr, "(4)"] & & \text{usw.}
\end{tikzcd}$$

Die van Dykesche Anpassungsvorschrift kann beim Auftreten von logarithmischen Störtermen zu falschen Ergebnissen führen! In manchen Fällen sind die dabei auftretenden Probleme von grundsätzlicher Natur, d.h. es gibt keine Abhilfe.
Um die Probleme mit logarithmischen Termen zu erläutern, setzen wir $n := \frac{1}{\epsilon}$ und betrachten die bekannte Stirlingsche Formel

$$\ln(n!) \;=\; \underbrace{n\ln(n) - n}_{=:A} + \underbrace{\frac{1}{2}\,\ln(n) + \ln\left(\sqrt{2\pi}\right)}_{=:B} + O(n^{-1}), \quad n \to \infty.$$

Offenbar gilt $n = o(n\ln(n))$, $n \to \infty$. Führen wir einen neuen Parameter $m = O(n)$, etwa $m = \frac{1}{2}\,n$ ein, dann lät sich A schreiben als

$$A \;=\; 2m\ln(2m) - 2m$$

oder als

$$A \;=\; 2m\ln(m) - 2m(1 - \ln(2)).$$

Dabei haben wir die Konstante 2 vom Term der Ordnung $O(n\ln(n))$ in den Term der Ordnung $O(n)$ wandern lassen. Aufgrund dieser Pathologie mu ein $n^p\log(n)$-Term immer mit dem korrespondierenden n^p-Term zu einem Term zusammengefat werden. In unserem Fall wäre also $A = n\ln(n) - n$ als **ein** Term zu betrachten.

Wenden wir nun die van Dyke-Vorschrift auf unser Beispiel der linearen Schwingung an. Wir erhalten

1) $n = m = 1$

$$y_p^{(1)} \;=\; 1 - e^{-t^*} \overset{\text{sek. Koord. einführen}}{=} \underbrace{1 - e^{-\frac{t}{\epsilon}}}_{=\left[y_p^{(1)}\right]_s} \overset{\text{Entw. nach }\epsilon\text{ bei festem }t}{=} \underbrace{1 + TKT}_{=\left[y_p^{(1)}\right]_s^{(1)}}$$

also $\left[y_p^{(1)}\right]_s^{(1)} = 1\,.$

$$y_s^{(1)} = e^{-t} \overset{\text{prim. Koord. einführen}}{=} \underbrace{e^{-\epsilon t^*}}_{=\left[y_s^{(1)}\right]_p} \overset{\text{Entw. nach }\epsilon\text{ bei festem }t^*}{=} \underbrace{1}_{=\left[y_s^{(1)}\right]_p^{(1)}} + \ldots\,,$$

also $\left[y_s^{(1)}\right]_p^{(1)} = 1\,.$

2) $n = 2\,,\ m = 1$

$$\begin{aligned} y_p^{(2)} \quad &= \quad 1 - e^{-t^*} + \epsilon\left(2 - t^*(2t^*)e^{-t^*}\right) \\ &\overset{\text{sek. Koord. einführen}}{=} \underbrace{1 - e^{-\frac{t}{\epsilon}} + \epsilon\left[2\left(1 - e^{-\frac{t}{\epsilon}}\right) - \frac{t}{\epsilon}\left(1 + e^{-\frac{t}{\epsilon}}\right)\right]}_{=\left[y_p^{(2)}\right]_s} \\ &\overset{\text{Entw. nach }\epsilon\text{ bei festem }t}{=} \underbrace{1 - t}_{=\left[y_p^{(2)}\right]_s^{(1)}} + \ldots\,, \end{aligned}$$

also $\left[y_p^{(2)}\right]_s^{(1)} = 1 - t\,.$

$$y_s^{(1)} \;=\; e^{-t} \overset{\substack{\text{prim. Koord.}\\ \text{einführen}}}{=} \underbrace{e^{-\epsilon t^*}}_{=\left[y_s^{(1)}\right]_p} \overset{\substack{\text{Entw. nach } \epsilon\\ \text{bei festem } t^*}}{=} \underbrace{\underbrace{1}_{=\left[y_s^{(1)}\right]_p^{(1)}} - \epsilon t^*}_{\left[y_s^{(1)}\right]_p^{(2)}} + \dots\;,$$

also $\left[y_s^{(1)}\right]_p^{(1)} = 1 - \epsilon t^* = 1 - t\,.$

Auch hier ist die Anpassungsbedingung bereits erfüllt. In verwandten Problemen hätten an dieser Stelle problemimmanente Konstanten angepat werden müssen.

Sind alle Anpassungsbedingungen erfüllt, müssen primäre und sekundäre Entwicklung nun tatsächlich aneinandergeklebt werden. Das ist auf verschiedene Arten möglich und nicht eindeutig!

Methode I: Additive Anpassung

$$y_+^{(n,m)} \;:=\; y_p^{(n)} + y_s^{(m)} - \left[y_s^{(m)}\right]_p^{(n)}\,.$$

Die formale Begründung dieser Formel ist, da ja bei erfüllter Anpassungsbedingung $\left[y_s^{(m)}\right]_p^{(n)} = \left[y_p^{(n)}\right]_s^{(m)}$ gelten mu. Damit gilt aber einerseits

$$\left[y_+^{(n,m)}\right]_p^{(n)} \;=\; y_p^{(n)} + \left[y_s^{(m)}\right]_p^{(n)} - \left[y_s^{(m)}\right]_p^{(n)} \;=\; y_p^{(n)},$$

und andererseits

$$\left[y_+^{(n,m)}\right]_s^{(m)} \;=\; \left[y_p^{(n)}\right]_s^{(m)} + y_s^{(m)} - \left[y_p^{(n)}\right]_s^{(m)} \;=\; y_s^{(m)},$$

so da die Formel der additiven Anpassung tatsächlich primäre und sekundäre Entwicklung reproduziert.

Wenden wir die Methode der adaptiven Anpassung auf unser Beispiel an, dann erhalten wir mit $n = m = 1$ die gleichmäig gültige Lösung

$$y_+^{(1,1)} \;=\; \underbrace{1 - e^{-t^*}}_{y_p^{(1)}} + \underbrace{e^{-t}}_{y_s^{(1)}} - \underbrace{1}_{\left[y_s^{(1)}\right]_p^{(1)}} \;=\; e^{-t} - e^{-\frac{t}{\epsilon}}.$$

Eine weitergehende, analoge Rechnung liefert

$$y_+^{(2,2)} \;=\; \left[1 + \epsilon(2 - t)\right] e^{-t} - (1 + 2\epsilon + t) e^{-\frac{t}{\epsilon}}.$$

Mitunter sind auch angepate Lösungen $y_+^{(n,m)}$ mit $n \neq m$ nützlich. Dabei sind dann die Fehler im äueren und inneren Gebiet natürlich von verschiedener Ordnung.

Methode II: Multiplikative Anpassung

$$y_*^{(n,m)} \;:=\; \frac{y_p^{(n)} y_s^{(m)}}{\left[y_s^{(m)}\right]_p^{(n)}}.$$

Wie auch bei der additiven Methode begründet sich die multiplikative Formel durch

$$\left[y_*^{(n,m)}\right]_p^{(n)} = \frac{y_p^{(n)} \left[y_s^{(m)}\right]_p^{(n)}}{\left[y_s^{(m)}\right]_p^{(n)}} = y_p^{(n)}$$

und

$$\left[y_*^{(n,m)}\right]_s^{(m)} = \frac{\left[y_p^{(n)}\right]_s^{(m)} y_s^{(m)}}{\left[y_p^{(n)}\right]_s^{(m)}} = y_s^{(m)}.$$

Primäre und sekundäre Entwicklung werden also reproduziert.

Beide Methoden haben einen Pferdefu! So kann die multiplikative Anpassung scheitern, wenn $\left[y_s^{(m)}\right]_p^{(n)}$ für einige Werte von t Null wird. Die additive Anpassung kann scheitern, wenn $\left[y_s^{(m)}\right]_p^{(n)}$ für einige Werte von t unbeschränkt ist.

5.7 Anwendung: Prandtlsche Grenzschichtgleichungen

Wir betrachten die Umströmung eines Körpers nach Abbildung 5.6.

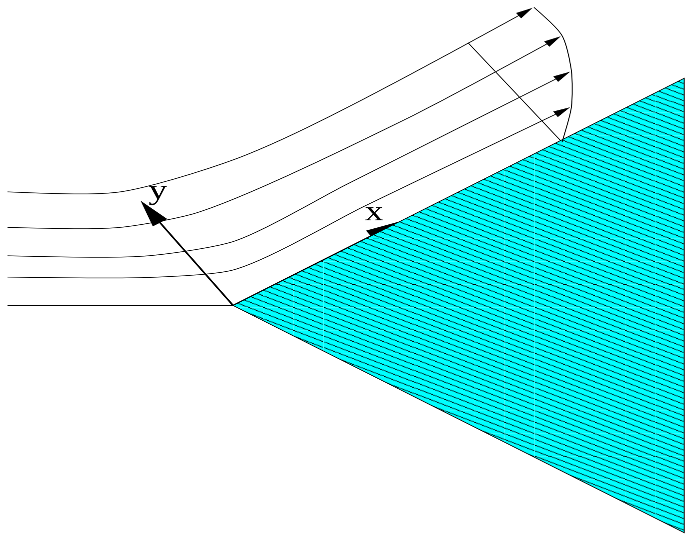


Abbildung 5.6: Umströmung eines Körpers

Die charakteristische Länge des Körpers sei $\widehat{L}$. Mit x und y bezeichnen wir die mit $\widehat{L}$ dimensionslos gemachten wandorientierten Koordinaten, d.h. $x = \frac{\hat{x}}{\widehat{L}}$, wobei $\hat{x}$ die dimensionsbehaftete Gröe bezeichnet. Wir wollen mit der Wirbeltransportgleichung arbeiten, die man unter vereinfachenden Annahmen aus der Navier-Stokes-Gleichung gewinnen kann. Bezeichnet Ψ die dimensionslose Stromfunktion, dann lautet die Wirbeltransportgleichung

$$\partial_y \Psi \cdot \partial_x (\Delta\Psi) - \partial_x \Psi \cdot \partial_y (\Delta\Psi) \;=\; \epsilon \Delta\Delta\Psi .$$

Dabei bezeichnet $\epsilon = \frac{1}{\mathrm{Re}} = \frac{\hat{\nu}}{\widehat{L}|\underline{\hat{v}}|_\infty}$ den Kehrwert der Reynolds-Zahl, die dem Einflu der kinematischen Zähigkeit $\hat{\nu}$ relativ zum Einflu des konvektiven Transports mit ($\mathrm{Re} \to \infty$ charakterisiert reibungsfreie Strömungen, je kleiner Re, umso gröer ist der Einflu der Reibung). Die Wirbeltransportgleichung bringt zwei Randbedingungen mit sich, nämlich die

$$\text{Haftbedingung am Körper:} \quad \Psi(x,0) \;=\; 0\,, \;\; \partial_y \Psi(x,0) \;=\; 0$$

und die für uns gänzlich uninteressante

Fernfeldrandbedingung

weit entfernt vom Körper.

Wir wollen den Fall kleiner Reibung $\mathrm{Re} \to \infty$, also $\epsilon \to 0$, betrachten und machen den Ansatz

$$\Psi(x, y; \epsilon) \;=\; \Psi(x, y) + \lambda_1(\epsilon)\Psi_1(x, y,) + \ldots, \qquad \lambda_1(\epsilon) \to 0 \quad \text{für} \quad \epsilon \to 0,$$

den wir in die Wirbeltransportgleichung einsetzen. Das liefert für Terme erster Ordnung die Gleichung

$$\partial_y \Psi_0 \cdot \partial_x(\Delta\Psi_0) - \partial_x \Psi_0 \cdot \partial_y(\Delta\Psi_0) \;=\; 0. \tag{5.7.1}$$

Wie wir sehen, enthält diese Gleichung keine Reibungsterme mehr, es liegt daher ein uns schon vertrauter Ordnungsverlust vor.

Nach den Helmholtzschen Wirbelsätzen bleibt eine zu Beginn drehungsfreie (d.h. $\Delta \times \underline{v} \;=\; 0$) Strömung immer drehungsfrei. Für eine drehungsfreie Strömung mu Ψ_0 die Laplace-Gleichung

$$\Delta\Psi_0 \;=\; 0$$

erfüllen. Damit gilt sicher $\Psi = 0$ an der Wand (denn die Wand ist eine Stromlinie), aber die Randbedingung $\partial_y \Psi = 0$ ist sicher nicht zu erreichen. An der Wand ist also (5.7.1) gar nicht brauchbar.

In Wandnähe wählen wir innere Koordinaten x, Y mit

$$Y \;=\; \frac{y}{\eta(\epsilon)}, \qquad \eta(\epsilon) \to 0 \quad \text{für} \quad \epsilon \to 0.$$

Setzt man die innere Entwicklung

$$\Psi(x, Y) \;=\; \Lambda_0(\epsilon)\Psi_0(x, Y) + \Lambda_1(\epsilon)\Psi_1(x, Y) + \ldots$$

mit

$$\Lambda_0(\epsilon) \;\to\; 0, \quad \epsilon \to 0$$

$$\tfrac{\Lambda_1}{\Lambda_0(\epsilon)} \;\to\; 0, \quad \epsilon \to 0 \qquad (\text{d.h. } \Lambda_1(\epsilon) \;=\; o(\Lambda_0(\epsilon)))$$

in die Wirbeltransportgleichung ein, dann folgt unter Vernachlässigung kleiner Terme

$$\partial_Y \Psi_0 \cdot \partial_x \partial_Y^2 \Psi_0 - \partial_x \Psi_0 \cdot \partial_Y^3 \Psi_0 \;=\; \frac{\epsilon}{\eta(\epsilon)\Lambda_0(\epsilon)}\, \partial_Y^4 \Psi_0. \tag{5.7.2}$$

Nehmen wir nun $\dfrac{\epsilon}{\eta(\epsilon)\Lambda_0(\epsilon)} \to 0$, $\epsilon \to \infty$ an. Dann würde auch in der inneren Entwicklung die höchste Ableitung entfallen und die Randbedingungen könnten wieder nicht erfüllt werden. Aus der Annahme $\dfrac{\epsilon}{\eta(\epsilon)\Lambda_0(\epsilon)} \to \infty$, $\epsilon \to 0$ würde folgen, da eine Anpassung an die äuere Entwicklung gar nicht möglich wäre, denn in der inneren Entwicklung würden keine Terme mehr vorkommen, die sich in der äueren Entwicklung finden.

Also schlieen wir, da wir

$$\frac{\epsilon}{\eta(\epsilon)\Lambda_0(\epsilon)} \;=\; O_s(1), \qquad \epsilon \to 0$$

annehmen dürfen. Die Gröen $\eta(\epsilon)$ und $\Lambda_0(\epsilon)$ sind damit so zu bestimmen, da

$$\frac{\epsilon}{\eta(\epsilon)\Lambda_0(\epsilon)} = 1$$

gilt (auftretende Konstanten haben wir zur Vereinfachung in η und Λ_0 untergebracht). Formale Integration bzgl. Y von (5.7.2) liefert dann

$$\partial_Y^3\Psi_0 + \partial_x\Psi_0 \cdot \partial_Y^2\Psi_0 - \partial_Y\Psi_0 \cdot \partial_x\partial_Y\Psi_0 = f(x) \tag{5.7.3}$$

mit einer Integrationsfunktion $f(x)$. Sie kann nur duch den Anpassungsproze bestimmt werden, da die Randbedingungen $\Psi_0(x,0) = \partial_Y\Psi(x,0) = 0$ keine Aussagen über f erlauben.

Also gilt hier: Die innere Entwicklung ist abhängig von der äueren, daher ist die innere Entwicklung die sekundäre, die äuere Entwicklung demnach die primäre Entwicklung.

Nehmen wir nun die Anpassung vor und betrachten den Fall $n = m = 1$. Wir haben also

$$\Psi_p^{(1)} = \Psi(x,y)$$

bei festgehaltener sekundärer Variablen Y zu entwickeln:

$$\Psi_0(x,\eta Y) = \Psi_0(x,0) + \eta Y\partial_y\Psi_0(x,0) + \ldots,$$

also

$$\left[\Psi_p^{(1)}\right]_s^{(1)} = \begin{cases} \Psi_0(x,0), & \text{falls} \quad \Psi_0(x,0) \neq 0 \\ \eta Y\partial_y\Psi_0(x,0), & \text{falls} \quad \Psi_0(x,0) = 0. \end{cases}$$

Die Entwicklung von $\Psi_s^{(1)} = \Lambda_0(\epsilon)\Psi_0(x,Y)$ bei fester primärer Variablen y liefert

$$\begin{aligned} \Lambda_0(\epsilon)\Psi_0\left(x,\frac{y}{\eta}\right) &= \Lambda_0(\epsilon)\Psi_0\left(x,\frac{y}{\eta}\right)\Big|_{\eta\to 0} + \ldots \\ &= \Lambda_0(\epsilon)\Psi_0(x,Y)|_{Y\to 0} + \ldots, \end{aligned}$$

also

$$\left[\Psi_s^{(1)}\right]_p^{(1)} = \Lambda_0(\epsilon)\Psi(x,Y)|_{Y\to\infty}.$$

Die Anpassungsbedingung

$$\left[\Psi_p^{(1)}\right]_s^{(1)} = \left[\Psi_s^{(1)}\right]_p^{(1)} \iff \Lambda_0(\epsilon)\Psi(x,Y)|_{Y\to\infty} = \eta(\epsilon)Y\partial_y\Psi_0(x,0)$$

ist daher nur im Fall $\Psi_0(x,0) = 0$ möglich, denn es soll $\eta \to 0$ und $\Delta_0 \to 0$ sein. Das ist aber genau die Randbedingung reibungsfreier Strömung!

Auerdem mu $\eta(\epsilon) = \Lambda_0(\epsilon)$ gelten, denn

$$\underbrace{\Lambda_0(\epsilon)}_{\text{Fkt. von } \epsilon} \cdot \underbrace{\Psi_0(x,Y)|_{Y\to\infty}}_{\text{keine Fkt. von } \epsilon} = \underbrace{\eta(\epsilon)}_{\text{Fkt. von } \epsilon} \underbrace{Y\partial_y\Psi_0(x,0)}_{\text{keine Fkt. von } \epsilon}.$$

Wegen $\dfrac{\epsilon}{\eta(\epsilon)\Lambda_0(\epsilon)} = 1$ folgt damit $\eta(\epsilon) = \Lambda_0(\epsilon) = \sqrt{\epsilon}$. Damit haben wir ein wichtiges Resultat der Prandtlschen Grenzschichttheorie bewiesen, nämlich die Grenzschicht-dicke von $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$.

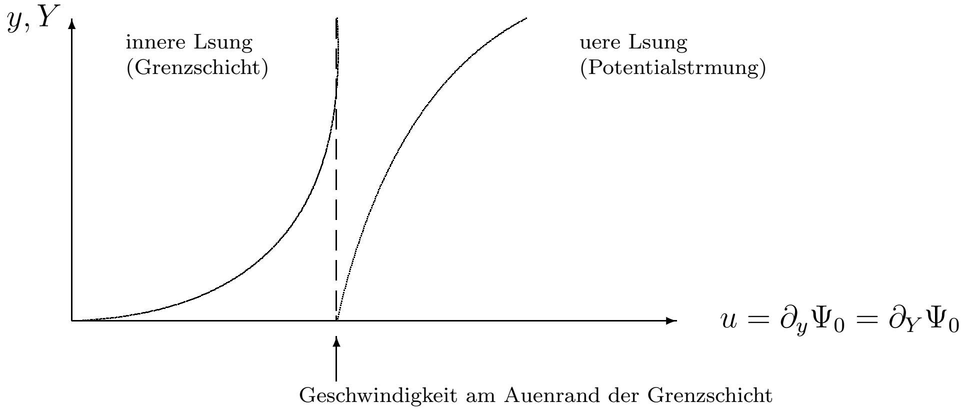
In der Anpassungsbedingung bleibt noch die Bedingung

$$\Psi_0(x,Y)\big|_{Y\to\infty} \;=\; Y\partial_y\Psi_0(x,0).$$

Dies ist – bei bereits bekannter äuerer Lösung Ψ_0 – eine „äuere“ Randbedingung für die Stromfunktion $\Psi_0(x,Y)$ der Grenzschicht. In der Grenzschichttheorie ist es üblich, diese Bedingung in der nach Y differenzierten Form

$$\partial_Y\Psi_0(x,\infty) \;=\; \partial_y\Psi_0(x,0) \tag{5.7.4}$$

zu schreiben. Dies ermöglicht eine schöne physikalische Interpretation: Die Tangentialgeschwindigkeit am Auenrand $(Y \to \infty)$ der Grenzschicht mu gleich sein der Tangentialgeschwindigkeit an der Wand $(y \to 0)$.



Lät man in der Differentialgleichung (5.7.3)

$$\partial_Y^3\Psi_0 + \partial_x\Psi_0\cdot\partial_Y^2\Psi_0 - \partial_Y\Psi_0\cdot\partial_x\partial_Y\Psi_0 \;=\; f(x)$$

$Y \to \infty$ gehen und beachtet (5.7.4), dann folgt

$$\underbrace{\partial_Y^2(\partial_y\Psi_0(x,0))}_{=0} + \partial_x\Psi_0\cdot\underbrace{\partial_Y(\partial_y\Psi_0(x,0))}_{=0} - \partial_y\Psi_0(x,0)\cdot\partial_x(\partial_y\Psi_0(x,0)) \;=\; f(x)$$

und die Integrationsfunktion f ergibt sich zu

$$f(x) \;=\; -\partial_y\Psi_0(x,0)\cdot\partial_x\partial_y\Psi_0(x,0).$$

Damit haben wir die berühmte Grundgleichung der Prandtlschen Grenzschichttheorie erster Ordnung hergeleitet. Sie lautet

$$\partial_Y^3\Psi_0 + \partial_x\Psi_0\cdot\partial_Y^2\Psi_0 - \partial_Y\Psi_0\cdot\partial_x\partial_Y\Psi_0 \;=\; -\partial_y\Psi_0(x,0)\cdot\partial_x\partial_y\Psi_0(x,0).$$

Schreitet man in der Anpassung weiter vor $(n, m > 1)$, dann erhält man die entsprechenden Grenschichttheorien höherer Ordnung. Der Aufwand für die Theorie zweiter Ordnung ist allerdings schon abschreckend hoch.

6 Eine kurze Herleitung der Eulerschen Bewegungsgleichungen

Wir wollen die Bewegungsgleichungen eines reibungsfreien, kompressiblen Fluids herleiten. Dazu sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{2,3\}$ und $\underline{x} \in D$. Wir stellen uns das Fluid als Kontinuum vor und betrachten daher ein Partikel des Fluids, das zur Zeit t durch den Punkt $\underline{x}$ verläuft. Die Geschwindigkeit des Fluids sei $\underline{x}, t \mapsto \underline{v}(\underline{x}, t) \in \mathbb{R}^n$. Ist $W \subset D$, dann ist die Masse in W zur Zeit t gegeben durch

$$\mathrm{ma}(W,t) := \int\limits_W \rho(\underline{x},t)d\underline{x},$$

wobei ρ die Dichte des Fluids bezeichnet.

Bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen folgen wir drei fundamentalen physikalischen Prinzipien:

(1) Masse wird nicht spontan erzeugt oder verschwindet spontan (Gesetz von der Erhaltung der Masse)

(2) Die nderung des Impulses $\rho \cdot \underline{v}$ ist proportional der wirkenden Kräfte (Newtons 2. Gesetz von der Bilanz des Impulses)

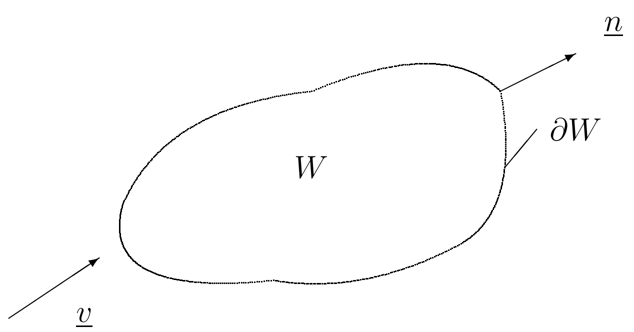
(3) Energie wird nicht spontan erzeugt oder verschwindet spontan (1. Hauptsatz der Thermodynamik)

6.1 Die Erhaltung der Masse

Sei $W \subset D$ zeitfest. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{ma}(W,t) = \int\limits_W \partial_t \rho(\underline{x},t)d\underline{x}$$

für die zeitliche Massenänderung in W.



Ist $\underline{n}$ die äuere Einheitsnormale an ∂W, dann ist $\underline{v} \cdot \underline{n}$ der Volumenstrom über ∂W pro Einheitsfläche und damit $\rho \underline{v} \cdot \underline{n}$ der Massenstrom pro Einheitsfläche.

Das Gesetz von der Erhaltung der Masse kann nun in der Form

$$\frac{d}{dt} \operatorname{ma}(W,t) \; = \; \text{Massenstrom über } \partial W$$

geschrieben werden. Da Masse dann ausströmt, wenn $\underline{u} \cdot \underline{n} > 0$ gilt, in diesem Fall aber $\frac{d}{dt} \operatorname{ma}(W,t) < 0$ vorliegt, erhalten wir

$$\int\limits_W \partial_t \rho d\underline{x} \; = \; - \oint\limits_{\partial W} \rho \underline{v} \cdot \underline{n} \, ds.$$

Dies ist die Integralform des Satzes vom Massenerhalt. Sind Dichte ρ und Geschwindigkeit $\underline{v}$ hinreichend glatt, dann folgt mit Hilfe des Gauschen Satzes

$$\int\limits_W \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) d\underline{x} \; = \; 0.$$

Da diese Beziehung für alle Kontrollvolumina W gelten mu, mu der Integrand verschwinden. Damit erhalten wir die berühmte Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) \; = \; 0, \tag{6.1.1}$$

die man auch als differentielle Form des Satzes von der Erhaltung der Masse bezeichnet.

6.2 Die Impulsbilanz

Ist $t \mapsto \underline{x}(t)$ die Trajektorie eines Fluidteilchens, dann ist dessen Geschwindigkeit gegeben durch

$$\underline{v}(\underline{x}(t), t) \;=\; \dot{\underline{x}}(t).$$

Die Beschleunigung des Teilchens ist demnach

$$\begin{aligned} \underline{a}(\underline{x}(t), t) \;=\; \ddot{\underline{x}}(t) \;=\; \frac{d}{dt}\,\underline{v}(\underline{x}(t), t) \;&=\; \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}\underline{v} \cdot \dot{x}_i + \partial_t \underline{v} \\ &=\; \partial_t \underline{v} + (\underline{v} \cdot \nabla)\underline{v}. \end{aligned}$$

Die Ableitung $\frac{D}{Dt} := \partial_t + (\underline{v} \cdot \nabla)$ heit substantielle Ableitung. Es handelt sich dabei um einen Differentialoperator längs der Trajektorie eines Fluidpartikels.

Im Fluid wirken Kräfte, und zwar durch den Druck $\underline{x}, t \mapsto p(\underline{x}, t)$. Stellt man sich eine Fläche im Fluid vor, dann ist die je Einheitsfläche am Punkt $\underline{x}$ zur Zeit t wirkende Kraft gerade $p\underline{n}$, wobei $\underline{n}$ der Normaleneinheitsvektor an die Fläche ist. In einem reibungsfreien Fluid wirken keine Kräfte tangential zu Flächen im Fluid. Die auf die Berandung ∂W eines Kontrollvolumens wirkende Gesamtkraft durch Druck ist damit

$$\underline{S}_{\partial W} \;:=\; -\int_{\partial W} p\underline{n}\, ds.$$

Das Vorzeichen resultiert aus der berlegung, da ein positiver Druck eine Kraft erzeugt, die gegen die äuere Einheitsnormale gerichtet ist.

Setzen wir wieder genügende Glattheit aller beteiligten Funktionen voraus, dann folgt mit dem Gauschen Satz

$$\underline{S}_{\partial W} \;=\; -\int_{W} \nabla p\, d\underline{x}.$$

Newtons 2. Gesetz (Kraft $=$ Masse $\times$ Beschleunigung) resultiert dann in der Impulsbilanz

$$\rho\,\frac{D\underline{v}}{Dt} \;=\; -\nabla p. \tag{6.2.1}$$

Betrachten wir z.B. die erste Zeile in (6.2.1) für den zweidimensionalen Fall

$$\rho\partial_t v_1 + \rho v_1 \partial_x v_1 + \rho v_2 \partial_y v_1 \;=\; -\partial_x p$$

und addieren das v_1-fache der Kontinuitsätsgleichung (6.1.1)

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho\underline{v}) \;=\; \partial_t \rho + \rho\partial_x v_1 + v_1 \partial_x \rho + \rho\partial_y v_2 + v_2 \partial_y \rho \;=\; 0,$$

dann lät sich die erste Impulsgleichung in der Form

$$\partial_t(\rho v_1) + \partial_x(\rho v_1^2 + p) + \partial_y(\rho v_1 v_2) \;=\; 0$$

zusammenfassen. Analog ergibt sich

$$\partial_t(\rho v_2) + \partial_x(\rho v_1 v_2) + \partial_y(\rho v_1^2 + p) \;=\; 0.$$

Diese Form der Impulsgleichungen nennt man Erhaltungs- oder Divergenzform, da man, analog zu (6.1.1), den Divergenzoperator einführen kann.

$$\partial_t(\rho v_i) + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \rho v_1 v_i + p\delta_{i1} \\ \rho v_2 v_i + p\delta_{i2} \end{pmatrix} = 0, \qquad i = 1, 2. \tag{6.2.2}$$

Dabei ist $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ das Kronecker-Symbol.

6.3 Die Energiebilanz

Bisher haben wir mit

$$
\begin{aligned}
&\partial_t\rho && + \quad \nabla\cdot(\rho\underline{v}) && = \ 0 \qquad \text{(Kontinuitätsgleichung)}\\
&\partial_t(\rho v_i) && + \quad \nabla\cdot\begin{pmatrix}\rho v_1 v_i + p\delta_{i1}\\ \vdots \\ \rho v_n v_i + p\delta_{in}\end{pmatrix} && = \ 0 \qquad \text{(Impulsbilanz)}
\end{aligned}
$$

$n+1$ Gleichungen für die $n+2$ gesuchten Funktionen $\underline{v}$, p und ρ. Die noch fehlende Gleichung wird durch den 1. Hauptsatz der Thermodynamik geliefert. Wir können hier nicht auf die Details der Herleitung eingehen und verweisen auf [6].

Die kinetische Energie des Fluids im Kontrollvolumen W ist

$$E_{\text{kin}} \ := \ \frac{1}{2}\int\limits_W \rho|\underline{v}|^2\, d\underline{x}.$$

Die Totalenergie ist gegeben durch

$$E \ := \ E_{\text{total}} \ := \ E_{\text{kin}} + E_{\text{inner}},$$

wobei E_{inner} die innere Energie bezeichnet, die eine aus dem 1. Hauptsatz zu folgernde thermodynamische Zustandsgröe ist. Die Energiebilanz ist damit gegeben durch

$$\partial_t(\rho E) + \nabla\cdot\Big((\rho E + p)\underline{v}\Big) \ = \ 0. \tag{6.3.1}$$

Benötigt wird nun noch eine Zustandsgleichung für das jeweilige Gas. Für ideale Gase, zu denen trockene Luft unter Umgebungsbedingungen näherungsweise zählt, gilt

$$p \ = \ (\gamma-1)\rho\left[E - \frac{|\underline{v}|^2}{2}\right] \tag{6.3.2}$$

mit $\gamma = 1.4$ für trockene Luft.

Damit erhält man das System der Eulerschen Bewegungsgleichungen

$$
\begin{aligned}
&\partial_t\rho + \nabla\cdot(\rho\underline{v}) \ = \ 0\\
&\partial_t(\rho v_i) + \nabla\cdot\begin{pmatrix}\rho v_1 v_i + p\delta_{i1}\\ \vdots \\ \rho v_n v_i + p\delta_{in}\end{pmatrix} \ = \ 0, \quad i = 1,\dots,n\\
&\partial_t(\rho E) + \nabla\cdot\Big((\rho E + p)\underline{v}\Big) \ = \ 0.
\end{aligned}
$$

Alle auftretenden Gröen sind natürlich mit physikalischen Dimensionen versehen. Wir wollen – wie schon als grundlegende Technik der Asymptotik bekannt – das System der Euler-Gleichungen entdimensionalisieren. Dazu bezeichnen wir alle dimensionsbehafteten Gröen mit dem Hut $\hat{}$, die Euler-Gleichungen schreiben sich also in der Form

$$\begin{aligned}
\partial_{\hat{t}}\hat{\rho} + \widehat{\nabla}\cdot(\hat{\rho}\underline{\hat{v}}) \;&=\; 0 \\
\partial_{\hat{t}}(\hat{\rho}\hat{v}_i) + \widehat{\nabla}\cdot\begin{pmatrix} \hat{\rho}\hat{v}_1\hat{v}_i + \hat{p}\delta_{i1} \\ \vdots \\ \hat{\rho}\hat{v}_n\hat{v}_i + \hat{p}\delta_{in} \end{pmatrix} \;&=\; 0, \quad i = 1,\ldots,n \\
\partial_{\hat{t}}(\hat{\rho}\widehat{E}) + \widehat{\nabla}\cdot\Big((\hat{\rho}\widehat{E} + \hat{p})\underline{\hat{v}}\Big) \;&=\; 0,
\end{aligned}$$

mit $\widehat{\nabla} := \sum\limits_{i=1}^{n} \partial_{\hat{x}_i}$.

6.4 Entdimensionalisierung der Euler-Gleichungen

Wir wählen die folgende Entdimensionalisierung.

Phys. Gröe	Bezugsgröe	Dimensionslose Gröe
Länge	$\widehat{L}$	$\underline{x} = \dfrac{\hat{\underline{x}}}{\widehat{L}}$
Zeit	$\dfrac{\widehat{L}}{\lvert\hat{\underline{v}}_\infty\rvert}$	$t = \dfrac{\hat{t}\lvert\hat{\underline{v}}_\infty\rvert}{\widehat{L}}$
Dichte	$\hat{\rho}_\infty$	$\rho = \dfrac{\hat{\rho}}{\hat{\rho}_\infty}$
Druck	$\hat{p}_\infty$	$p = \dfrac{\hat{p}}{\hat{p}_\infty}$
Geschwindigkeit	$\lvert\hat{\underline{v}}_\infty\rvert$	$\underline{v} = \dfrac{\hat{\underline{v}}}{\lvert\hat{\underline{v}}_\infty\rvert}$

Damit wird aus der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial\hat{t}} + \widehat{\nabla}\cdot(\hat{\rho}\hat{\underline{v}}) = 0 \implies \frac{\hat{\rho}_\infty}{\frac{\widehat{L}}{\lvert\hat{\underline{v}}_\infty\rvert}}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\hat{\rho}_\infty}{\widehat{L}}\lvert\hat{\underline{v}}_\infty\rvert\nabla\cdot(\rho\underline{v}) = 0$$

$$\implies \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\underline{v}) = 0,$$

es gibt also keinen Unterschied zwischen dimensionsbehafteter und entdimensionalisierter Kontinuitätsgleichung.

Für die Impulsgleichungen

$$\partial_{\hat{t}}(\hat{\rho}\hat{v}_i) + \widehat{\nabla}\cdot\begin{pmatrix}\hat{\rho}\hat{v}_1\hat{v}_i + \hat{p}\delta_{i1}\\ \vdots \\ \hat{\rho}\hat{v}_n\hat{v}_i + \hat{p}\delta_{in}\end{pmatrix} = 0, \quad i = 1,\dots,n$$

folgt

$$\frac{\hat{\rho}_\infty\lvert\hat{\underline{v}}_\infty\rvert}{\frac{\widehat{L}}{\lvert\hat{\underline{v}}_\infty\rvert}}\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\hat{\rho}_\infty\lvert\hat{\rho}\hat{\underline{v}}_\infty\rvert^2}{\widehat{L}}\nabla\cdot\begin{pmatrix}\rho v_1 v_i\\ \vdots \\ \rho v_n v_i\end{pmatrix} + \frac{\hat{p}_\infty}{\widehat{L}}\nabla\cdot\begin{pmatrix}p\delta_{i1}\\ \vdots \\ p\delta_{in}\end{pmatrix} = 0.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \nabla\cdot\begin{pmatrix}\rho v_1 v_i\\ \vdots \\ \rho v_n v_i\end{pmatrix} + \frac{\hat{p}_\infty}{\hat{\rho}_\infty\lvert\hat{\underline{v}}_\infty\rvert^2}\nabla\cdot\begin{pmatrix}p\delta_{i1}\\ \vdots \\ p\delta_{in}\end{pmatrix} = 0.$$

Wir bezeichnen die Gröe

$$\mathrm{M} := \frac{|\hat{\underline{v}}_\infty|}{\sqrt{\frac{\hat{p}_\infty}{\hat{\rho}_\infty}}}$$

als Entwicklungsparameter. Damit sind die entdimensionalisierten Impulsgleichungen gerade

$$\partial_t(\rho v_i) + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \rho v_1 v_i \\ \vdots \\ \rho v_n v_i \end{pmatrix} + \frac{1}{\mathrm{M}^2} \nabla \cdot \begin{pmatrix} p\delta_{i1} \\ \vdots \\ p\delta_{in} \end{pmatrix} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Die Entdimensionalisierung der Energie $\widehat{E}$ wird über die Zustandsgleichung

$$\hat{p} = (\gamma - 1)\hat{\rho} \left[\widehat{E} - \frac{|\hat{\underline{v}}|^2}{2}\right] \quad \Longleftrightarrow \quad \widehat{E} = \frac{\hat{p}}{(\gamma - 1)\hat{\rho}} + \frac{|\hat{\underline{v}}|^2}{2}$$

vorgenommen.

Es folgt

$$\begin{aligned} \widehat{E} &= \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}_\infty} \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + |\hat{\underline{v}}_\infty|^2 \frac{|\underline{v}|^2}{2} \\ \Longrightarrow \quad \frac{\widehat{E}}{\frac{\hat{p}_\infty}{\hat{\rho}_\infty}} &= \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + \underbrace{\frac{|\hat{\underline{v}}_\infty|^2}{\frac{\hat{p}_\infty}{\hat{\rho}_\infty}}}_{\mathrm{M}^2} \frac{|\underline{v}|^2}{2} = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + \mathrm{M}^2 \frac{|\underline{v}|^2}{2}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$E = \frac{\hat{\rho}_\infty \widehat{E}}{\hat{p}_\infty}$$

als entdimensionalisierte Energie und

$$p = (\gamma - 1)\rho \left[E - \mathrm{M}^2 \frac{|\underline{v}|^2}{2}\right]$$

ist die entdimensionalisierte Zustandsgleichung.

Damit folgt aus der Energiegleichung $\partial_{\hat{t}}\left(\hat{\rho}\widehat{E}\right) + \nabla \cdot \left((\hat{\rho}\widehat{E} + \hat{p})\hat{\underline{v}}\right) = 0$ die entdimensionalsierte Form

$$\frac{\hat{\rho}_\infty \frac{\hat{p}_\infty}{\hat{\rho}_\infty}}{\frac{\widehat{L}}{|\hat{\underline{v}}_\infty|}} \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\hat{\rho}_\infty \frac{\hat{p}_\infty}{\hat{\rho}_\infty} |\hat{\underline{v}}_\infty|}{\widehat{L}} \nabla \cdot (\rho E \underline{v}) + \frac{\hat{p}_\infty |\hat{\underline{v}}_\infty|}{\widehat{L}} \nabla \cdot (p\underline{v}) = 0,$$

bzw.

$$\partial_t(\rho E) + \nabla \cdot \Big((\rho E + p)\underline{v}\Big) = 0$$

Die gewählte Entdimensionalisierung hinterlät ihre Spuren also nur in den Impulsgleichungen und in der Zustandsgleichung in Form des Entwicklungsparameters.

Insgesamt ergibt sich das entdimensionalisierte System der Eulerschen Bewegungsgleichungen also zu

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) &= 0 \\
\partial_t (\rho v_i) + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \rho v_1 v_i \\ \vdots \\ \rho v_n v_i \end{pmatrix} + \frac{1}{\mathrm{M}^2} \nabla \cdot \begin{pmatrix} p\delta_{i1} \\ \vdots \\ p\delta_{in} \end{pmatrix} &= 0, \quad i = 1, \ldots, n \\
\partial_t (\rho E) + \nabla \cdot \Big((\rho E + p) \underline{v} \Big) &= 0
\end{aligned} \tag{6.4.1}$$

mit der Zustandsgleichung

$$p = (\gamma - 1)\rho \left[E - \mathrm{M}^2 \frac{|\underline{v}|^2}{2} \right]. \tag{6.4.2}$$

6.5 Zur Theorie inkompressibler, reibungsfreier Strömung

Wir treffen die folgende fundamentale

Annahme: Ein von der Strömung mitbewegtes Volumen W_t bleibt zeitlich konstant, d.h.

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{W_t} d\underline{x} \;=\; 0.$$

Strömungen, die dieser Annahme gehorchen, heien **inkompressibel**.

Ist $\underline{X}_{\tilde{t}} : \underline{x} \mapsto \underline{X}_{\tilde{t}}(\underline{x}) \in \mathbb{R}^d$ die **Strömungsabbildung**, die ein Partikel, das zur Zeit $t = 0$ am Punkt $\underline{x} \in \mathbb{R}^d$ war, auf den Punkt $\underline{X}_{\tilde{t}}(\underline{x})$ zur Zeit $t = \tilde{t}$ transportiert, dann bezeichne

$$J(\underline{x}, t) \;:=\; \det \begin{pmatrix} \partial_{x_1} X_{t,1} & \cdots & \partial_{x_d} X_{t,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} X_{t,d} & \cdots & \partial_{x_d} X_{t,d} \end{pmatrix}$$

die Jacobideterminante dieser Abbildung. Wie man leicht nachrechnet, gilt

Lemma 6.1.

$$\partial_t J(\underline{x}, t) \;=\; J(\underline{x}, t) \nabla \cdot \underline{v}(\underline{X}_t(x), t)).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int\limits_{W_t} d\underline{x} \;&=\; \frac{d}{dt}\int\limits_{W_0} J(\underline{x}, t) d\underline{x} \;=\; \int\limits_{W_0} \partial_t J(\underline{x}, t) d\underline{x} \\ &=\; \int\limits_{W_0} J(\underline{x}, t) \nabla \cdot \underline{v}(\underline{X}_t(\underline{x}), t) d\underline{x} \;=\; \int\limits_{W_t} \nabla \cdot \underline{v}(\underline{x}, t) d\underline{x}. \end{aligned}$$

Unter der Annahme der Inkompressibilität haben wir die folgende Charakterisierung gefunden.

Lemma 6.2.
Strömungen mit divergenzfreiem Geschwindigkeitsfeld sind genau die inkompressiblen Strömungen, d.h.

$$\text{Strömung inkompressibel} \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla \cdot \underline{v} \;=\; 0.$$

Setzen wir $\rho = \text{const}$ in den kompressiblen Euler-Gleichungen, so bleibt wegen $\partial_t \rho = 0$ und

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) \;=\; \partial_t \rho + \rho \nabla \cdot \underline{v} \;=\; 0$$

gerade

$$\nabla \cdot \underline{v} \;=\; 0$$

von der Kontinuitätsgleichung zurück.

Aus den Impulsgleichungen ($\rho \equiv 1$ o.B.d.A.)

$$\partial_t \underline{v} + (\underline{v} \cdot \nabla)\underline{v} + \nabla p \;=\; 0$$

folgert man durch Multiplikation mit $\underline{v}$, Beachtung von

$$\partial_t |\underline{v}|^2 \;=\; \partial_t \sum_{i=1}^{d} v_i^2 \;=\; 2\sum_{i=1}^{d} v_i \partial_t v_i \;=\; 2\underline{v} \cdot \partial_t \underline{v},$$

und Einsetzen der Zustandsgleichung, da die Energiegleichung bereits aus den Impulsgleichungen folgt! Damit lauten die **inkompressiblen Euler-Gleichungen** in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

$$\left.\begin{aligned} \partial_t \underline{v} + (\underline{v} \cdot \nabla)\underline{v} + \nabla p &= 0 \\ \nabla \cdot \underline{v} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty)$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{v}\big|_{t=0} &= \underline{v}_0 \\ \nabla \cdot \underline{v}_0 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \text{in} \quad \Omega$$

Als Randbedingungen wollen wir die Dirichlet-Bedingungen $\underline{v} \cdot \underline{n} = 0$ auf $\Omega \times (0,\infty)$ und $\underline{v}_0 \cdot \underline{n} = 0$ auf $\partial\Omega$ zulassen.

Interessanterweise ist die Situation im Fall $d = 2$ bei den inkompressiblen Euler-Gleichungen vollständig verschieden vom Fall $d = 3$. Im zweidimensionalen erfüllt nämlich die Drehung

$$\omega \;:=\; \nabla \times \underline{v} \;=\; \partial_{x_1} v_2 - \partial_{x_2} v_1$$

die Wirbeltransportgleichung

$$\partial_t \omega + (\underline{v} \cdot \nabla)\omega \;=\; 0.$$

Man sieht das leicht ein, in dem man die Impulsgleichungen mit dem Operator $\nabla\times$ bearbeitet und die Beziehung $\nabla \times (\underline{v} \cdot \nabla)\underline{v} = \underline{v} \cdot \nabla(\nabla \times \underline{v})$ für $\nabla \cdot \underline{v} = 0$ verwendet. Die Wirbeltransportgleichung in 2 Raumdimensionen entpuppt sich also als harmlose Transportgleichung.

Im Fall $d = 3$ ist bekannt, da $\|\omega(\cdot,t)\|_{L^\infty}$ unbeschränkt wächst, wenn t sich einem Wert T_0 nähert. Es ist nicht bekannt, ob T_0 endlich ist! Damit ist die Beantwortung der Frage, ob glatte Lösungen in endlicher Zeit singulär werden können, völlig offen.

Um uns wenigstens einen kleinen berblick über Existenzfragen zu verschaffen, wollen wir einen Satz zitieren, der im wesentlichen die bekannten Resultate umfat. Dazu geben wir die

Definition 6.3.
Es sei P ein Projektor, der ein Geschwindigkeitsfeld auf divergenzfreie Vektorfelder abbildet. Man nennt $\underline{v} \in L^\infty\big((0,\infty); L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)\big)$ schwache Lösung der inkompressiblen Euler-Gleichungen, wenn im Fall $d = 2$

(i) $\forall \underline{\varphi} \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,\infty);\mathbb{R}^2), \underline{\varphi} = \underline{0}$ für $t \to \infty$:

$$\int_0^\infty \int_\Omega \underline{v} \cdot \big\{\partial_t \underline{\varphi} + (\underline{v} \cdot \nabla)P\underline{\varphi}\big\}\, d\underline{x}\, dt + \int_\Omega \underline{v}_0 \cdot \underline{\varphi}(\underline{x},0) d\underline{x} \;=\; 0$$

(ii) $\nabla \cdot \underline{v} = 0$ in $\mathcal{D}'(\Omega \times (0,\infty))$

(iii) $\underline{v} \cdot \underline{n} = 0$ auf $\partial\Omega \times (0,\infty))$

gilt. Für $d > 2$ gilt an Stelle von (i)

(i)' $\forall \underline{\varphi} \in C_0^\infty(\Omega \times [0,\infty); \mathbb{R}^d)$, mit $\nabla \cdot \underline{\varphi} = 0$ in $\Omega \times (0,\infty))$:

$$\int_0^\infty \int_\Omega \underline{v} \cdot \left\{\partial_t \underline{\varphi} + (\underline{v} \cdot \nabla)\underline{\varphi}\right\} d\underline{x}\, dt + \int_\Omega \underline{v}_0 \cdot \underline{\varphi}(\underline{x}, 0) d\underline{x} \;=\; 0.$$

Damit erhalten wir den folgenden, in P.L. Lions – Mathematical Topics in Fluid Mechanics I, Oxford University Press, 1986, bewiesenen

Satz 6.4.
Sei $\underline{v}_0 \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^d)$ mit $\nabla \cdot \underline{v}_0 = 0$ und $\nabla \times \underline{v}_0 \in L^r(\Omega;\mathbb{R})$ für ein $r \in (1,\infty]$. Dann existiert $\underline{v} \in C\left([0,\infty); W^{1,r}(\Omega;\mathbb{R}^d\right)$. Es gilt

$$\underline{v} \in C\left([0,\infty); L^q \cap W^{1,r}(\Omega;\mathbb{R}^d)\right) + \underline{v}_0$$

mit $q = \max\left(1, \frac{2r}{r+2}\right)$ im Fall $\Omega = \mathbb{R}^2$. Es gilt

$$\underline{v} \in C\left([0,\infty); L^2 \cap W^{1,s}(\Omega;\mathbb{R}^d)\right) \quad \forall s \in (1,\infty)$$

im Fall $r = \infty$ und beschränktem Ω. Es gilt

$$\underline{v} \in C\left([0,\infty); L^2 \cap W^{1,s}_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^d)\right) \quad \forall s \in (1,\infty)$$

im Fall $r = \infty$ und $\Omega = \mathbb{R}^2$. Falls $r = \infty$ gilt in jedem Fall

$$\nabla \times \underline{v} \in L^\infty\left(\Omega \times (0,\infty)\right).$$

Ist $r = \infty$ und $\underline{v}_0 \in W^{K,P}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ mit $K \in \mathbb{N}$, $1 < P < \infty$, $K > 1 + \frac{2}{P}$, dann ist die Lösung eindeutig.

7 Mehrskalenentwicklungen

Im Kapitel 3 wurde deutlich, da ein notwendiges Kriterium für eine erfolgreiche asymptotische Analyse in der geeigneten Wahl der zugrundeliegenden asymptotischen Folge liegt. Viele Problemstellungen weisen jedoch ein Verhalten auf, so da auch bei einer vorliegenden sinnvollen asymptotischen Folge keine zufriedenstellende asymptotische Entwicklung ermittelt werden kann. Die Ursache dieser Tatsache liegt häufig im Verhalten der betrachteten Differentialgleichung, die im Grenzfall ihren Typ wechselt oder eine Ordnung verliert, so da die gegebenen Anfangs- oder Randbedingungen auf ein überbestimmtes System führen. Oftmals treten daher in der Lösung u Phänomene auf, die sich auf unterschiedlichen räumlichen oder zeitlichen Skalen bewegen und somit eine Darstellung der Funktion u in der Form (3.0.7) unmöglich machen.

Betrachten wir hierzu als Beispiel die gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\epsilon^2 u''(x;\epsilon) + u(x;\epsilon) = (1-\epsilon^2)\sin x,\ x \in (0,\pi), \epsilon \in (0,\epsilon_1)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(0;\epsilon) = \epsilon \text{ und } u'(0;\epsilon) = 1.$$

Die exakte Lösung lautet

$$u(x;\epsilon) = \sin x + \epsilon \cos\frac{x}{\epsilon},$$

so da aufgrund der Beschränktheit der Kosinusfunktion die Lösung gleichmäig für $\epsilon \to 0$ gegen die Lösung des ungestörten Problems konvergiert, obwohl in diesem Fall die Differentialgleichung zwei Ordnungen verliert und zu einer algebraischen Gleichung mit Anfangsbedingungen degeneriert. Trotz dieser Eigenschaft gilt die folgende Aussage.

Satz 7.1.
Für die Funktion $u : (0,\pi) \times (0,\epsilon_1) \to \mathbb{R}$

$$u(x;\epsilon) = \sin x + \epsilon \cos\frac{x}{\epsilon} \tag{7.0.1}$$

existiert keine asymptotische N-term Entwicklung gemä Definition 3.3, die der Bedingung

$$u(x;\epsilon) - \sum_{n=1}^{N} \phi_n(\epsilon) u_n(x) = o(\epsilon),\ \epsilon \to 0 \tag{7.0.2}$$

genügt.

Beweis:
Satz 3.6 liefert bei festgelegter asymptotischer Folge $\{\phi_n(\epsilon)\}_{n\in\mathbb{N}}$ neben der Eindeutigkeit der asymptotischen Entwicklung für eine gegebene Funktion $u : D \times I \to \mathbb{R}$ auch eine Vorschrift zur Berechnung der asymptotischen Funktionen $u_n : D \to \mathbb{R}$. Da einerseits für $\phi_1(\epsilon) \gg 1$, $\epsilon \to 0$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{u(x;\epsilon)}{\phi_1(\epsilon)} = 0$$

gilt und andererseits der obige Grenzwert für $\phi_1(\epsilon) = o(1)$, $\epsilon \to 0$ nicht existiert, folgt mit (3.1.1), da o.B.d.A. $\phi_1(\epsilon) = 1$ gewählt werden kann. Hiermit ergibt sich

$$u_1(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{u(x;\epsilon)}{\phi_1(\epsilon)} = \sin x.$$

Da $u(x;\epsilon) - u_1(x) = \epsilon \cos \frac{x}{\epsilon}$ nicht die geforderte Bedingung (7.0.2) erfüllt, mu die asymptotische Entwicklung mindestens zu einer Zweitermentwicklung erweitert werden. Die Verwendung von $\phi_2(\epsilon)$ mit $\phi_2(\epsilon) \gg \epsilon$, $\epsilon \to 0$ kann wegen

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{u(x;\epsilon) - u_1(x)}{\phi_2(\epsilon)} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon \cos \frac{x}{\epsilon}}{\phi_2(\epsilon)} = 0$$

vernachlässigt werden, so da lediglich

$$1 \ll \phi_2(\epsilon) \underline{\ll} \epsilon, \ \epsilon \to 0 \tag{7.0.3}$$

eine sinnvolle Zweitermentwicklung liefern kann. Genügt $\phi_2(\epsilon)$ der Bedingung (7.0.3), so existiert jedoch der Grenzwert zur Berechnung der Funktion u_2 nicht, wodurch mit u_1 die bestmögliche Einskalenentwicklung vorliegt. $\square$

Satz 7.1 verdeutlicht auf eindrucksvolle Weise das Versagen von Einskalenentwicklungen bei Funktionen, die einen Einflu mehrerer Skalen aufweisen. Für den Fall eines kleinen Parameters ϵ zeigt sich, da die Funktionen u_n nur langwellige Effekte beschreiben können, da sie ausschlielich von der Variablen x abhängen und sich der Einflu des Parameters ϵ bei dem gewählten Einskalenansatz alleinig in der Amplitude und nicht in der Frequenz auswirken kann. Diese Eigenschaft kommt in dem betrachteten Beispiel dadurch zum Tragen, da die langwellige Sinusschwingung der Funktion u durch den gewählten Ansatz reproduziert wird, während die für kleine ϵ hochfrequente Überlagerung nicht dargestellt werden kann. Für spezielle Strömungsfelder werden wir im folgenden detailliert nachweisen, da der in den Euler-Gleichungen auftretende Druck im Fall einer kleinen Mach-Zahl neben langwelligen Phänomenen auch betragsmäig kleine, hochfrequente Anteile aufweist. Folglich sollte für eine asymptotische Analyse der Euler-Gleichungen ein Mehrskalenansatz verwendet werden.

Definition 7.2.
Seien $u : D \times I \to \mathbb{R}, (\underline{x};\epsilon) \overset{u}{\mapsto} u(\underline{x};\epsilon)$, $\{\phi_n(\epsilon)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine asymptotische Folge und $\underline{g} : D \times I \to \tilde{D}$, dann heit

$$\sum_{n=1}^{N} \phi_n(\epsilon) u_n(\underline{g}(\underline{x};\epsilon)) \tag{7.0.4}$$

eine asymptotische N-term Mehrskalenentwicklung von u, falls

$$u(\underline{x};\epsilon) - \sum_{n=1}^{N} \phi_n(\epsilon) u_n(\underline{g}(\underline{x};\epsilon)) = o(\phi_N(\epsilon)), \ \epsilon \to 0 \tag{7.0.5}$$

gilt. Die asymptotische Entwicklung heit gleichmäig gültig, falls (7.0.5) gleichmäig in D gilt.

Die Grundidee der Mehrskalenentwicklung liegt in der Verwendung eines im Verhältnis zu D höherdimensionalen Raums $\tilde{D}$, innerhalb dessen D mittels einer durch $\underline{g}$ beschriebenen Mannigfaltigkeit repräsentiert wird. Die genutzten Funktionen u_n sind weiterhin unabhängig vom Parameter ϵ, können jedoch in Abhängigkeit von der eingeführten Abbildung $\underline{g}$ Phänomene auf unterschiedlichen Skalen repräsentieren. Die durch (7.0.1) gegebene Funktion kann daher in kanonischer Weise durch eine Mehrskalenentwicklung dargestellt werden. Zur Berücksichtigung der zwei auftretenden Skalen definieren wir die Abbildung

$$\underline{g} : (0, \pi) \times (0, \epsilon_1) \to \mathbb{R}^2 \text{ durch } \underline{g}(x; \epsilon) = \begin{pmatrix} x \\ \frac{x}{\epsilon} \end{pmatrix}.$$

Mit

$$u_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ u_1(\xi_1, \xi_2) = \sin \xi_1$$

und

$$u_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ u_2(\xi_1, \xi_2) = \cos \xi_2$$

erhalten wir bei Verwendung der asymptotischen Folge $\{\phi_n(\epsilon) = \epsilon^{n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$u(x; \epsilon) - \phi_1(\epsilon) u_1(\underline{g}(x; \epsilon)) = \epsilon \cos \frac{x}{\epsilon} = o(\phi_1(\epsilon)),\ \epsilon \to 0$$

und

$$u(x; \epsilon) - \phi_1(\epsilon) u_1(\underline{g}(x; \epsilon)) - \phi_2(\epsilon) u_2(\underline{g}(x; \epsilon)) = 0,$$

so da bereits mit einer asymptotischen Zweitermmehrskalenentwicklung die Funktion u bei geeigneter Wahl der zugrundeliegenden Abbildung $\underline{g}$ und der asymptotischen Folge $\{\phi_n(\epsilon)\}_{n\in\mathbb{N}}$ exakt dargestellt werden kann.

7.1 Mehrskalenanalyse der Euler-Gleichungen

Die Euler-Gleichungen beschreiben reibungsfreie Strömungen im Gültigkeitsbereich der Kontinuumsannahme. Sie beinhalten mit den Erhaltungsgleichungen der Masse, des Impulses und der Energie drei fundamentale Prinzipien der Physik und stellen ein hyperbolisches System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung dar.

Während die Navier-Stokes-Gleichungen bei einer üblichen Entdimensionalisierung mit der Reynolds-Zahl eine für die Strömung charakteristische dimensionslose Kennzahl beinhalten, weisen die dimensionslosen Euler-Gleichungen in der Regel keine solche Gröe auf. Um eine asymptotische Analyse der Euler-Gleichungen für den Grenzfall einer verschwindenden Mach-Zahl Ma durchführen zu können, erweist es sich als sinnvoll, eine Entdimensionalisierung der Gleichungen derart vorzunehmen, da das System eine Kennzahl M mit $\mathrm{M} = O_s(\mathrm{Ma})$, $\mathrm{Ma} \to 0$ enthält.

Die Tabelle 1 beschreibt die verwendete Transformation der Strömungsgröen in dimensionslose Variablen und Tabelle 2 beinhaltet die dimensionslosen Kennzahlen, wobei der auftretende Isentropenexponent γ das Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen repräsentiert, so da für Luft $\gamma = 1.4$ gilt und c die Schallgeschwindigkeit repräsentiert. Das Superskript $\hat{}$ kennzeichnet

Physikalische Gröe	Bezugsgröe	Dimensionslose Gröe
Länge	$\hat{L}$	$\underline{x} = \frac{\hat{\underline{x}}}{\hat{L}}$
Zeit	$\frac{\hat{L}}{\lvert\hat{\underline{v}}_\infty\rvert}$	$t = \frac{\hat{t}\lvert\hat{\underline{v}}_\infty\rvert}{\hat{L}}$
Geschwindigkeit	$\lvert\hat{\underline{v}}_\infty\rvert$	$\underline{v} = \frac{\hat{\underline{v}}}{\lvert\hat{\underline{v}}_\infty\rvert}$
Dichte	$\hat{\rho}_\infty$	$\rho = \frac{\hat{\rho}}{\hat{\rho}_\infty}$
Druck	$\hat{p}_\infty$	$p = \frac{\hat{p}}{\hat{p}_\infty}$
Totalenergie	$\frac{\hat{p}_\infty}{\hat{\rho}_\infty}$	$E = \frac{\hat{E}\hat{\rho}_\infty}{\hat{p}_\infty}$

Tabelle 1: Bezugsgröen und dimensionslose Variablen.

Mach-Zahl	$\mathrm{Ma} = \frac{\lvert\hat{\underline{v}}\rvert}{\hat{c}}$
Entwicklungsparameter	$\mathrm{M} = \sqrt{\gamma}\,\mathrm{Ma}$

Tabelle 2: Dimensionslose Kennzahlen.

dimensionsbehaftete Gröen, der Index $_\infty$ die Referenzwerte der Anströmung und $\hat{L}$ repräsentiert die charakteristische Bezugslänge.

Bei den betrachteten Strömungsfeldern gehen wir von der physikalisch sinnvollen Annahme aus, da zu jeder auftretenden Gröe $\hat{w} \in \left\{\hat{\rho}, \hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_d, \hat{p}, \hat{E}\right\}$ Konstanten $r > 0$ und $c > 0$ derart existieren, da

$$|\hat{w}(\underline{x}, t)| \leq c,\ \forall(\underline{x}, t) \in (\mathbb{R}^d \setminus B_{\underline{x}}(\underline{0}, r)) \times \mathbb{R}_0^+$$

gilt, wobei $B_{\underline{x}}(\underline{0}, r)$ die abgeschlossene d-dimensionale Kugel vom Radius r um den Nullpunkt repräsentiert. Diese Eigenschaft erwarten wir folglich auch von den dimensionslosen Variablen. Um einen sinnvollen Zusammenhang zwischen den vorliegenden physikalischen Zuständen im Fernfeld und den Referenzwerten der Anströmung zu gewährleisten, fordern wir stets

$$\left|\frac{\hat{w}(\underline{x}, t)}{\hat{w}_\infty}\right| \leq c^*,\ \forall(\underline{x}, t) \in (\mathbb{R}^d \setminus B_{\underline{x}}(\underline{0}, r^*)) \times \mathbb{R}_0^+ \tag{7.1.1}$$

mit Konstanten $r^* > 0$ und $c^* > 0$, die unabhängig von der gewählten Entdimensionalisierung sind.

Bezeichnen wir mit $m_i = \rho v_i$ die i-te Impulskomponente und fassen die Erhaltungsgröen im Vektor der konservativen Variablen

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ m_1 \\ \vdots \\ m_d \\ \rho E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \underline{m} \\ \rho E \end{pmatrix}$$

zusammen, so lassen sich die Euler-Gleichungen unter Verwendung der Enthalpie $H = E + p/\rho$ als System von Erhaltungsgleichungen in der Form

$$\partial_t \underline{u} + \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j} \underline{f}_j(\underline{u}) = \underline{0} \text{ in } \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+ \tag{7.1.2}$$

schreiben, wobei

$$\underline{f}_j(\underline{u}) = \begin{pmatrix} m_j \\ m_1 v_j + \delta_{1j}\, \mathrm{M}_\infty^{-2}\, p \\ \vdots \\ m_d v_j + \delta_{dj}\, \mathrm{M}_\infty^{-2}\, p \\ \rho H v_j \end{pmatrix}, \; j = 1, 2, 3$$

die konvektiven Flufunktionen repräsentieren. Die Euler-Gleichungen stellen somit ein System von $d+2$ Gleichungen für die $d+3$ Unbekannten $\rho, m_1, \ldots, m_d, \rho E$ und p dar, so da das System erst durch Hinzunahme der algebraisch gegebenen Zustandsgleichung geschlossen ist. Diese ergibt sich unter Berücksichtigung der beschriebenen Entdimensionalisierung in der Form

$$p = (\gamma - 1)\, \rho \left(E - \frac{\mathrm{M}_\infty^2}{2} |\underline{v}|^2 \right) = (\gamma - 1)\, \rho e, \tag{7.1.3}$$

wobei e die innere Energie darstellt.

7.1.1 Asymptotischer Mehrskalenansatz für die Euler-Gleichungen

Für die Analyse der Euler-Gleichungen im Bereich einer sehr kleinen Mach-Zahl nehmen wir eine Einskalenentwicklung in der Zeit und eine Zweiskalenentwicklung im Raum vor.

Wir betrachten daher feste aber beliebige $\mathrm{M}_\infty \in I := (0, \mathrm{M}')$ mit $\mathrm{M}' \ll 1$ und definieren für die d-dimensionalen Euler-Gleichungen die Abbildung

$$\underline{g} : \mathbb{R}^{d+1} \times I \to \mathbb{R}^{2d+1}$$

durch

$$(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty) \stackrel{\underline{g}}{\longmapsto} (\underline{x}, \mathrm{M}_\infty\, \underline{x}, t)\,. \tag{7.1.4}$$

Hierbei ist zu bemerken, da die Abbildung $\underline{g}$ wie auch einige im folgenden betrachteten physikalischen Gröen im Urbildbereich das Intervall I aufweisen, die Entwicklungen jedoch stets für einen festen Entwicklungsparameter M_∞ durchgeführt werden, so da keine Ableitungen nach dem Entwicklungsparameter vorgenommen werden. Zur Verdeutlichung dieses Sachverhaltes trennen wir variable und feste Gröen stets durch ein Semikolon.

Bezeichne $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ den Raum der linearen Abbildungen vom $\mathbb{R}^m$ in den $\mathbb{R}^n$ und $D\underline{f} = \big(D_1\underline{f},\dots,D_m\underline{f}\big)$ die Ableitung der Funktion $\underline{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ im Sinne der Funktionalmatrix, dann gilt

$$D\underline{g}(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty) = \begin{bmatrix} \underline{\underline{I}} & \\ \mathrm{M}_\infty\,\underline{\underline{I}} & \\ & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d+1};\mathbb{R}^{2d+1}\right),$$

wobei $\underline{\underline{I}}$ die Identität auf dem $\mathbb{R}^d$ repräsentiert.

Für die durch

$$\big(f\circ\underline{g}\big)(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty) = f\left(\underline{g}(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty)\right)$$

gegebene Komposition der Funktion $f : \mathbb{R}^{2d+1} \to \mathbb{R}$ und der Abbildung $\underline{g}$ erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
&D\left(f\circ\underline{g}\right)(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty)\\
&\quad= Df\left(\underline{g}(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty)\right)\cdot D\underline{g}(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty)\\
&\quad= \left[D_1 f\left(\underline{g}(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty)\right),\dots,D_{2d+1} f\left(\underline{g}(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty)\right)\right]\cdot D\underline{g}(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty)\\
&\quad= \Big[D_1 f\left(\underline{g}(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty)\right) + \mathrm{M}_\infty\, D_{d+1} f\left(\underline{g}(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty)\right),\dots,\\
&\qquad D_d f\left(\underline{g}(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty)\right) + \mathrm{M}_\infty\, D_{2d} f\left(\underline{g}(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty)\right),\\
&\qquad D_{2d+1} f\left(\underline{g}(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty)\right)\Big] \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d+1};\mathbb{R}\right).
\end{aligned} \tag{7.1.5}$$

Unter Verwendung der asymptotischen Folge $\left\{\phi_n(\mathrm{M}_\infty) = \mathrm{M}_\infty^{n-1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ und der durch (7.1.4) gegebenen Abbildung $\underline{g}$ werden wir im folgenden das Verhalten von Lösungen der Euler-Gleichungen (7.1.2) untersuchen, bei denen sich jede physikalische Größe $w : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+ \times I \to \mathbb{R}$ bei festem aber beliebigem Parameter $\mathrm{M}_\infty \in (0,\mathrm{M}')$ in der Form

$$\begin{aligned}
w(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty) &= \sum_{i=1}^{3} \phi_i(\mathrm{M}_\infty)\, w^{(i-1)}\left(\underline{g}(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty)\right) + o\left(\phi_3(\mathrm{M}_\infty)\right),\ \mathrm{M}_\infty \to 0\\
&= \sum_{i=1}^{3} \mathrm{M}_\infty^{i-1}\ w^{(i-1)}\left(\underline{g}(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty)\right) + o\left(\mathrm{M}_\infty^2\right),\ \mathrm{M}_\infty \to 0
\end{aligned} \tag{7.1.6}$$

mit

$$w^{(i-1)} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R},\ i = 1,2,3$$

$$(\eta_1,\dots,\eta_d,\xi_1,\dots,\xi_d,t) \overset{w^{(i-1)}}{\longmapsto} w^{(i-1)}(\eta_1,\dots,\eta_d,\xi_1,\dots,\xi_d,t)$$

schreiben lät und die hierdurch gegebene asymptotische Entwicklung gleichmäig gültig in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+$ ist. Zusätzlich fordern wir, da die vorliegende Dreitermmehrskalenentwicklung die gleichmäig gültigen k-term Mehrskalenentwicklungen für $k = 1, 2$ enthält. Für die asymptotischen Funktionen $w^{(0)}$ und $w^{(1)}$ erhalten wir hieraus die folgende Eigenschaft.

Lemma 7.3.
Sei $w : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+ \times (0, \mathrm{M}') \to \mathbb{R}$ eine physikalische Gröe und die unter Verwendung der durch (7.1.4) definierten Abbildung gegebene asymptotische Mehrskalenentwicklung

$$w\left(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty\right) = \sum_{i=1}^{j} \mathrm{M}_\infty^{i-1}\ w^{(i-1)}\left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right) + o\left(\mathrm{M}_\infty^{j-1}\right),\ \mathrm{M}_\infty \to 0$$

für $j = 1, 2, 3$ gleichmäig gültig, dann folgt mit beliebigem aber festem $\alpha > 0$ für die asymptotischen Funktionen

$$w^{(0)}\left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right) = o\left(|\underline{x}|^\alpha\right),\ \underline{x} \in \partial B_{\underline{x}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right),\quad \mathrm{M}_\infty \to 0 \tag{7.1.7}$$

und

$$w^{(i-1)}\left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right) = o\left(|\underline{x}|\right),\ \underline{x} \in \partial B_{\underline{x}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right),\quad \mathrm{M}_\infty \to 0,\ i = 2, 3, \tag{7.1.8}$$

wobei $B_{\underline{x}}\left(\underline{0}, r\right) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^d \big|\, |\underline{x}| \le r\}$ gilt.

Beweis:
Aufgrund der bezüglich der Entdimensionalisierung geforderten Eigenschaft (7.1.1) ergibt sich mit beliebigem aber festem $\alpha > 0$

$$w(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty) = o(\mathrm{M}_\infty^{-\alpha}),\ \underline{x} \in \partial B_{\underline{x}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right),\ \mathrm{M}_\infty \to 0.$$

Mit der vorausgesetzten gleichmäigen Gültigkeit von

$$w(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty) = w^{(0)}\left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right) + o(1),\ \mathrm{M}_\infty \to 0$$

in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+$ erhalten wir somit für alle $\underline{x} \in \partial B_{\underline{x}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)$

$$w^{(0)}\left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right) = o\left(\mathrm{M}_\infty^{-\alpha}\right),\ \mathrm{M}_\infty \to 0.$$

Zum Nachweis der zweiten Behauptung nutzen wir wiederum die gleichmäige Gültigkeit der Mehrskalenentwicklung, so da wir für $i = 2, 3$

$$w^{(i-1)}\left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right) = o\left(\mathrm{M}_\infty^{-1}\right),\ \mathrm{M}_\infty \to 0, \tag{7.1.9}$$

gleichmäig für alle $(\underline{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+$ erhalten. Sei $\{\mathrm{M}_{\infty,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, dann definieren wir eine beliebige Folge $\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\underline{x}_n \in \partial B_{\underline{x}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_{\infty,n}}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund der gleichmäigen Gültigkeit der Gleichung (7.1.9) folgt für $i = 2,3$

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{w^{(i-1)}\left(\underline{g}(\underline{x}_n, t; \mathrm{M}_{\infty,n})\right)}{\mathrm{M}_{\infty,n}^{-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{w^{(i-1)}\left(\underline{g}(\underline{x}_n, t; \mathrm{M}_{\infty,n})\right)}{|\underline{x}_n|}$$

und somit

$$w^{(i-1)}\left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right) = o\left(|\underline{x}|\right), \ \underline{x} \in \partial B_{\underline{x}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right), \quad \mathrm{M}_\infty \to 0, \ i = 2,3.$$

□

An dieser Stelle sei bemerkt, da der vorgenommene Ansatz (7.1.6) nicht notwendigerweise zu sinnvollen asymptotischen Gleichungen führen mu. Es wird sich jedoch zeigen, da mit der gewählten Mehrskalenentwicklung in Kombination mit einigen zusätzlichen physikalischen Annahmen hilfreiche Informationen über das Verhalten der Strömungsgröen im Bereich kleiner Mach-Zahlen gewonnen werden können.

Lemma 7.4.
Existiert für die physikalischen Gröen w, g, h mit $w = gh$ je eine Dreitermmehrskalenentwicklung gemä (7.1.6), dann gelten für die Funktionen $w^{(0)}, w^{(1)}$ und $w^{(2)}$ die Darstellungen

$$\begin{aligned} w^{(0)} &= g^{(0)}h^{(0)} \\ w^{(1)} &= g^{(0)}h^{(1)} + g^{(1)}h^{(0)} \\ w^{(2)} &= g^{(0)}h^{(2)} + g^{(1)}h^{(1)} + g^{(2)}h^{(0)}. \end{aligned}$$

Beweis:
Der Beweis ergibt sich direkt durch eine Multiplikation der Dreitermmehrskalenentwicklungen der Gröen g und h. □

Für die weitere Vorgehensweise erweist es sich als sinnvoll, die Euler-Gleichungen unter Nutzung der Differentialoperatoren D_i in der Form

$$\begin{aligned} \left(D_{d+1}\rho + \sum_{j=1}^{d} D_j m_j\right)(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty) &= 0 \\ \left(D_{d+1}m_i + \sum_{j=1}^{d} D_j\left(m_i v_j + \delta_{ij}\,\mathrm{M}_\infty^{-2}\,p\right)\right)(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty) &= 0, \ i = 1,\dots,d \\ \left(D_{d+1}\left(\rho E\right) + \sum_{j=1}^{d} D_j\left(\rho H v_j\right)\right)(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty) &= 0 \end{aligned}$$

zu schreiben. Das Einsetzen des Ansatzes (7.1.6) für die Dichte und alle Impulskomponenten in die Kontinuitätsgleichung liefert unter Verwendung von

$$
\begin{aligned}
&D_{d+1}\rho\left(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty\right)\\
&= D_{d+1}\left(\sum_{i=1}^{3}\mathrm{M}_\infty^{i-1}\left(\rho^{(i-1)}\circ\underline{g}\right)\right)\left(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty\right)+o\left(\mathrm{M}_\infty^2\right),\ \mathrm{M}_\infty\to 0\\
&= \sum_{i=1}^{3}\mathrm{M}_\infty^{i-1}\,D_{2d+1}\rho^{(i-1)}\left(\underline{g}(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty)\right)+o\left(\mathrm{M}_\infty^2\right),\ \mathrm{M}_\infty\to 0
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
&D_j m_j\left(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty\right)\\
&= D_j\left(\sum_{i=1}^{3}\mathrm{M}_\infty^{i-1}\left(m_j^{(i-1)}\circ\underline{g}\right)\right)\left(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty\right)+o\left(\mathrm{M}_\infty^2\right),\ \mathrm{M}_\infty\to 0\\
&= D_j m_j^{(0)}\left(\underline{g}(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty)\right)+\mathrm{M}_\infty\left(D_{d+j}m_j^{(0)}+D_j m_j^{(1)}\right)\left(\underline{g}(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty)\right)\\
&\quad +\mathrm{M}_\infty^2\left(D_{d+j}m_j^{(1)}+D_j m_j^{(2)}\right)\left(\underline{g}(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty)\right)+o\left(\mathrm{M}_\infty^2\right),\ \mathrm{M}_\infty\to 0,
\end{aligned}
$$

$j=1,\ldots,d$, die Gleichung

$$
\begin{aligned}
&\left[D_{2d+1}\rho^{(0)}+\sum_{j=1}^{d}D_j m_j^{(0)}\right]\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)\\
&+\ \mathrm{M}_\infty\left[D_{2d+1}\rho^{(1)}+\sum_{j=1}^{d}\left(D_{d+j}m_j^{(0)}+D_j m_j^{(1)}\right)\right]\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)\\
&+\ \mathrm{M}_\infty^2\left[D_{2d+1}\rho^{(2)}+\sum_{j=1}^{d}\left(D_{d+j}m_j^{(1)}+D_j m_j^{(2)}\right)\right]\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)\\
&=\ o\left(\mathrm{M}_\infty^2\right),\ \mathrm{M}_\infty\to 0,\ \forall\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)\in\widetilde{\mathcal{D}},
\end{aligned}
\tag{7.1.10}
$$

wobei

$$
\widetilde{\mathcal{D}}:=\left\{\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0^+\,\middle|\,\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)=\underline{g}(\underline{x},t;\mathrm{M}_\infty),\ (\underline{x},t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0^+\right\}
$$

die durch $\underline{g}$ festgelegte Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^{2d}\times\mathbb{R}_0^+$ repräsentiert.

Durch ein analoges Vorgehen erhalten wir mit Lemma 7.4 für die Impulsgleichungen

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{M}_\infty^{-2}\left[D_i p^{(0)}\right]\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)\\
&+\ \mathrm{M}_\infty^{-1}\left[D_{d+i}p^{(0)}+D_i p^{(1)}\right]\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)\\
&+\ \left[D_{2d+1}m_i^{(0)}+\sum_{j=1}^{d}D_j\left(m_i^{(0)}v_j^{(0)}+\delta_{ij}p^{(2)}\right)+D_{d+i}p^{(1)}\right]\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)\\
&=\ o\left(1\right),\ \mathrm{M}_\infty\to 0,\ \forall\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)\in\widetilde{\mathcal{D}},\ i=1,\ldots,d
\end{aligned}
\tag{7.1.11}
$$

und für die Energiegleichung

$$
\begin{aligned}
&\left[D_{2d+1}\left(\rho E\right)^{(0)}+\sum_{j=1}^{d}D_j\left(\rho H v_j\right)^{(0)}\right]\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)\\
+\;&\mathrm{M}_\infty\left[D_{2d+1}\left(\rho E\right)^{(1)}+\sum_{j=1}^{d}\left(D_{d+j}\left(\rho H v_j\right)^{(0)}+D_j\left(\rho H v_j\right)^{(1)}\right)\right]\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)\\
+\;&\mathrm{M}_\infty^2\left[D_{2d+1}\left(\rho E\right)^{(2)}+\sum_{j=1}^{d}\left(D_{d+j}\left(\rho H v_j\right)^{(1)}+D_j\left(\rho H v_j\right)^{(2)}\right)\right]\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)\\
=\;&o\left(\mathrm{M}_\infty^2\right),\ \mathrm{M}_\infty\to 0,\ \forall\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)\in\widetilde{\mathcal{D}}. \qquad (7.1.12)
\end{aligned}
$$

Zusammenfassend liefert uns die bisherige Analyse der Euler-Gleichungen folgende Aussage. Existiert für jede physikalische Gröe w einer Lösung der Euler-Gleichungen (7.1.2) eine Mehrskalenentwicklung gemä (7.1.6), dann erfüllen die entsprechenden asymptotischen Funktionen $w^{(0)}, w^{(1)}$ und $w^{(2)}$ die Gleichungen (7.1.10), (7.1.11) und (7.1.12).

Um konkrete Aussagen für die jeweiligen Funktionen $w^{(i-1)}$, $i=1,2,3$ treffen zu können, betrachten wir nur Lösungen der Euler-Gleichungen, zu deren physikalischen Gröen je eine Mehrskalenentwicklung gemä (7.1.6) derart existiert, da die vorliegenden Gleichungen (7.1.10) bis (7.1.12) für alle $\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)\in\mathcal{D}$ mit

$$
\mathcal{D}:=\left\{\left(\underline{\eta},\underline{\xi},t\right)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_0^+\,|\xi_j<\mathrm{M}'\,\eta_j, j=1,\ldots,d \text{ mit } \quad \mathrm{M}'\ll 1\right\}
$$

erfüllt sind. Dadurch weisen die in den eckigen Klammern auftretenden Terme keine Abhängigkeit von M_∞ auf, so da mit Satz 3.8 die Gleichung (7.1.10) zu

$$
D_{2d+1}\rho^{(0)}+\sum_{j=1}^{d}D_j m_j^{(0)} \;=\; 0 \text{ in } \mathcal{D}, \qquad (7.1.13)
$$

$$
D_{2d+1}\rho^{(1)}+\sum_{j=1}^{d}\left(D_{d+j}m_j^{(0)}+D_j m_j^{(1)}\right) \;=\; 0 \text{ in } \mathcal{D}, \qquad (7.1.14)
$$

$$
D_{2d+1}\rho^{(2)}+\sum_{j=1}^{d}\left(D_{d+j}m_j^{(1)}+D_j m_j^{(2)}\right) \;=\; 0 \text{ in } \mathcal{D}, \qquad (7.1.15)
$$

die Gleichungen (7.1.11) für $i=1,\ldots,d$ zu

$$
D_i p^{(0)} \;=\; 0 \text{ in } \mathcal{D}, \qquad (7.1.16)
$$

$$
D_{d+i}p^{(0)}+D_i p^{(1)} \;=\; 0 \text{ in } \mathcal{D}, \qquad (7.1.17)
$$

$$
D_{2d+1}m_i^{(0)}+\sum_{j=1}^{d}D_j\left(m_i^{(0)}v_j^{(0)}+\delta_{ij}p^{(2)}\right)+D_{d+i}p^{(1)} \;=\; 0 \text{ in } \mathcal{D} \qquad (7.1.18)
$$

und die Gleichung (7.1.12) zu

$$D_{2d+1}\left(\rho E\right)^{(0)} + \sum_{j=1}^{d} D_j\left(\rho H v_j\right)^{(0)} \;=\; 0 \;\text{ in }\; \mathcal{D}, \tag{7.1.19}$$

$$D_{2d+1}\left(\rho E\right)^{(1)} + \sum_{j=1}^{d} \Big(D_{d+j}\left(\rho H v_j\right)^{(0)} + D_j\left(\rho H v_j\right)^{(1)} \Big) \;=\; 0 \;\text{ in }\; \mathcal{D}, \tag{7.1.20}$$

$$D_{2d+1}\left(\rho E\right)^{(2)} + \sum_{j=1}^{d} \Big(D_{d+j}\left(\rho H v_j\right)^{(1)} + D_j\left(\rho H v_j\right)^{(2)} \Big) \;=\; 0 \;\text{ in }\; \mathcal{D}, \tag{7.1.21}$$

äquivalent sind. Konsequenterweise fordern wir analog zur Erweiterung des vorliegenden Gültigkeitsbereiches der obigen Differentialgleichungen auch die Unabhängigkeit der in Lemma 7.3 nachgewiesenen Eigenschaften (7.1.7) und (7.1.8) der asymptotischen Funktionen vom Entwicklungsparameter M_∞. Für die im folgenden betrachteten asymptotischen Funktionen gelte daher stets

$$w^{(0)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) = o\left(|\underline{\eta}|^{\alpha}\right), \; \underline{\eta} \in \partial B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right), \;\; \mathrm{M}_\infty \to 0 \tag{7.1.22}$$

mit beliebigem aber festem $\alpha > 0$ und

$$w^{(i)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) = o\left(|\underline{\eta}|\right), \; \underline{\eta} \in \partial B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right), \;\; \mathrm{M}_\infty \to 0, \; i = 1,2 \tag{7.1.23}$$

für alle $\left(\underline{\xi}, t\right) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0^+$ mit $\underline{\xi} < M'\underline{\eta}$.

Ersetzen wir die Differentialoperatoren D_i wieder durch die entsprechenden partiellen Ableitungen, so lassen sich die Gleichungen (7.1.13) bis (7.1.21) als asymptotisches System in der Form

$$\partial_t \rho^{(0)} + \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{m}^{(0)} \;=\; 0 \tag{7.1.24}$$

$$\partial_t \rho^{(1)} + \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{m}^{(1)} \;=\; -\nabla_{\underline{\xi}} \cdot \underline{m}^{(0)} \tag{7.1.25}$$

$$\partial_t \rho^{(2)} + \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{m}^{(2)} \;=\; -\nabla_{\underline{\xi}} \cdot \underline{m}^{(1)} \tag{7.1.26}$$

$$\nabla_{\underline{\eta}} p^{(0)} \;=\; \underline{0} \tag{7.1.27}$$

$$\nabla_{\underline{\eta}} p^{(1)} \;=\; -\nabla_{\underline{\xi}} p^{(0)} \tag{7.1.28}$$

$$\partial_t \underline{m}^{(0)} + \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \left(\underline{m}^{(0)} \otimes \underline{v}^{(0)}\right) + \nabla_{\underline{\eta}} p^{(2)} \;=\; -\nabla_{\underline{\xi}} p^{(1)} \tag{7.1.29}$$

$$\partial_t \left(\rho E\right)^{(0)} + \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \left(\rho H \underline{v}\right)^{(0)} \;=\; 0 \tag{7.1.30}$$

$$\partial_t \left(\rho E\right)^{(1)} + \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \left(\rho H \underline{v}\right)^{(1)} \;=\; -\nabla_{\underline{\xi}} \cdot \left(\rho H \underline{v}\right)^{(0)} \tag{7.1.31}$$

$$\partial_t \left(\rho E\right)^{(2)} + \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \left(\rho H \underline{v}\right)^{(2)} \;=\; -\nabla_{\underline{\xi}} \cdot \left(\rho H \underline{v}\right)^{(1)} \tag{7.1.32}$$

schreiben.

7.1.2 Analyse des asymptotischen Systems

Eine mögliche Vorgehensweise zur Entwicklung eines Verfahrens im Bereich sehr kleiner Mach-Zahlen liegt in der Lösung der im letzten Abschnitt hergeleiteten Differentialgleichungen (7.1.24) bis (7.1.32) und einer anschlieenden Berechnung jeder physikalischen Gröe w gemä Ansatz (7.1.6) unter Verwendung der ermittelten asymptotischen Funktionen $w^{(i)}$, $i = 0, 1, 2$. Diese Vorgehensweise erweist sich bei praxisrelevanten Problemstellungen jedoch zumeist als immens aufwendig, da signifikant mehr Differentialgleichungen gelöst werden müssen, die zudem abhängig vom gewählten Mehrskalenansatz auf einem Integrationsgebiet definiert sind, das eine vielfache Dimension des Ausgangsgebietes besitzt. Im Gegensatz hierzu werden wir in diesem Paragraphen, ausgehend von den Differentialgleichungen (7.1.24) bis (7.1.32), Aussagen über die asymptotischen Funktionen herleiten, die uns einen tieferen Einblick in die physikalischen Phänomene einer Strömung im Bereich sehr kleiner Mach-Zahlen liefern. Anschlieend werden wir die hierdurch erhaltenen Informationen innerhalb eines Verfahrens zur Berechnung der kompressiblen Euler-Gleichungen nutzen und somit den Anwendungsbereich der Methode bis in den Grenzfall einer verschwindenden Mach-Zahl erweitern.

Bei der asymptotischen Analyse gehen wir von zwei unterschiedlichen Regimen aus. Im ersten Regime betrachten wir Strömungsfelder, deren räumlicher Anteil $V = V(\mathrm{M}_\infty) \subset \mathbb{R}^d$ der Bedingung

$$d_{\max}(V) = O_s\left(\hat{L}\right), \mathrm{M}_\infty \to 0$$

genügt, wobei

$$d_{\max}(V) := \sup_{\underline{x},\underline{y} \in V} \max_{k=1,\ldots,d} |x_k - y_k| \tag{7.1.33}$$

gilt. In diesem Regime ist somit V für hinreichend kleine Entwicklungsparameter M_∞ beschränkt und es gilt

$$\lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} \frac{\mathrm{M}_\infty \, d_{\max}(V)}{\hat{L}} = 0,$$

so da der in der asymptotischen Analyse auftretenden Skala $\underline{\xi}$ der langwelligen Phänomene im Bereich sehr kleiner Mach-Zahlen keine Informationen mehr entnommen werden können, da die Frequenzen der langwelligen Effekte im Verhältnis zur Gröe des betrachteten Strömungsfeldes unendlich gro werden. Jede asymptotische Funktion $f^{(i)}$, $i = 0, 1, 2$ ist daher konstant auf der langwelligen Skala $\underline{\xi}$, so da

$$\nabla_{\underline{\xi}} f^{(i)} = \underline{0}, \; i = 0, 1, 2 \tag{7.1.34}$$

für jedes Strömungsfeld V mit $d_{\max}(V) = O_s\left(\hat{L}\right), \mathrm{M}_\infty \to 0$ vorausgesetzt werden kann.

Im zweiten Regime liegt ein Strömungsfeld vor, dessen räumlicher Anteil $V = V(\mathrm{M}_\infty)$ die Bedingung

$$d_{\min}(V) = O_s\left(\frac{\hat{L}}{\mathrm{M}_\infty}\right), \mathrm{M}_\infty \to 0$$

mit

$$d_{\min}(V) := \sup_{\underline{x},\underline{y} \in V} \min_{k=1,\ldots,d} |x_k - y_k| \tag{7.1.35}$$

erfüllt. In diesem Fall können die führenden asymptotischen Funktionen der Mehrskalenentwicklung auch im Fall beliebig kleiner Mach-Zahlen signifikante Einflüsse auf der langwelligen Skala $\underline{\xi}$ beinhalten, so da $O_s(1)$-Variationen der physikalischen Gröen auch durch langwellige Phänomene hervorgerufen werden können.

Bemerkung 7.5.
Zum Nachweis der Eigenschaften der asymptotischen Funktionen können die durch (7.1.7) und (7.1.8) beschriebenen Abklingverhalten ausschlielich für Strömungsfelder des zweiten Regimes genutzt werden. Diese Einschränkung begründet sich auf der Tatsache, da die in Lemma 7.3 hergeleiteten Eigenschaften der asymptotischen Funktionen auf der Grundlage beruhen, da o.B.d.A.

$$B_{\underline{x}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right) \subset V(\mathrm{M}_\infty) \ \ \forall\, \mathrm{M}_\infty \in (0, \mathrm{M}')$$

vorausgesetzt werden kann.

Den ersten Indikator für den Wechsel der dimensionslosen Euler-Gleichungen (7.1.2) von einem hyperbolischen zu einem hyperbolisch-elliptischen System erkennen wir bereits innerhalb der Impulsgleichungen. Der vorliegende Druckgradient wird durch das Quadrat des Entwicklungsparameters M_∞ dividiert, so da die Impulsgleichungen bei kleiner werdender Mach-Zahl Ma_∞ zunehmend stärker einen elliptischen Charakter aufweisen. Diese Eigenschaft spiegelt sich in der asymptotischen Analyse in den elliptischen Differentialgleichungen (7.1.27) und (7.1.28) für die Druckterme $p^{(0)}$ und $p^{(1)}$ wieder. Mit dem folgenden Satz werden wir ausgehend von diesen Gleichungen erste unmittelbare Folgerungen für diese Funktionen nachweisen.

Satz 7.6.
Es gilt

$$p^{(0)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) = P^{(0)}(t) \tag{7.1.36}$$

und

$$p^{(1)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) = P^{(1)}\left(\underline{\xi}, t\right).$$

Beweis:
Zunächst erhalten wir

$$p^{(0)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) = \tilde{P}^{(0)}\left(\underline{\xi}, t\right) \tag{7.1.37}$$

direkt aus der Gleichung (7.1.27).

Für Strömungsfelder des ersten Regimes ergibt sich somit die Behauptung unmittelbar aus der asymptotischen Impulsgleichung (7.1.28) unter Berücksichtigung der Gleichung (7.1.34).

Für das zweite Regime folgt mit (7.1.28)

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)} \nabla_{\underline{\xi}} p^{(0)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) d\underline{\eta} &= - \int\limits_{B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)} \nabla_{\underline{\eta}} p^{(1)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) d\underline{\eta} \\
&= - \int\limits_{\partial B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)} p^{(1)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) \underline{n}\left(\underline{\eta}\right) ds,
\end{aligned}$$

wobei $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_d)^T$ die äuere Einheitsnormale an $\partial B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)$ repräsentiert. Unter Berücksichtigung der Gleichung (7.1.37) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\underline{\xi}} \tilde{P}^{(0)}\left(\underline{\xi}, t\right) &= -\frac{1}{\left|B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)\right|} \int\limits_{\partial B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)} p^{(1)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) \underline{n}\left(\underline{\eta}\right) ds \\
&\overset{(7.1.23)}{=} O\left(\mathrm{M}_\infty^d\right) \cdot O\left(\mathrm{M}_\infty^{1-d}\right) \cdot o\left(\mathrm{M}_\infty^{-1}\right), \ \mathrm{M}_\infty \to 0 \\
&= o\left(1\right), \ \mathrm{M}_\infty \to 0,
\end{aligned}
$$

wodurch sich

$$
p^{(0)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) = P^{(0)}\left(t\right)
$$

ergibt und mit (7.1.28)

$$
p^{(1)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) = P^{(1)}\left(\underline{\xi}, t\right)
$$

folgt. □

Hochfrequente Fluktuationen weisen aufgrund der obigen Sätze maximal einen Einflu der Gröenordnung $O\left(\mathrm{M}_\infty^2\right)$ auf die vorliegende Druckverteilung aus, während eventuell auftretende langwellige Phänomene Variationen der Gröenordnung $O\left(\mathrm{M}_\infty\right)$ im Druckfeld hervorrufen können. $O\left(1\right)$-Variationen des Drucks treten nur im zeitlichen Verlauf gleichmäig für das gesamte Strömungsfeld auf und wir erhalten im Fall einer verschwindenden Mach-Zahl die zu erwartende räumlich konstante Druckverteilung.

Satz 7.7.
Es gilt

$$
\nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{v}^{(0)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) = \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{V}^{(0)}\left(\underline{\eta}, t\right) = -\frac{1}{\gamma P^{(0)}(t)} \frac{dP^{(0)}}{dt}(t). \tag{7.1.38}
$$

Beweis:
Einsetzen der asymptotischen Entwicklungen (7.1.6) für ρE und $\rho|\underline{v}|^2$ in die Zustandsgleichung (7.1.3) liefert

$$
\begin{aligned}
&p(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty) \\
&= (\gamma - 1)\left((\rho E)^{(0)} + \mathrm{M}_\infty (\rho E)^{(1)} + \mathrm{M}_\infty^2 \left[(\rho E)^{(2)} - \frac{1}{2}\left(\rho|\underline{v}|^2\right)^{(0)}\right]\right)\left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right) \\
&\quad + o\left(\mathrm{M}_\infty^2\right), \ \mathrm{M}_\infty \to 0,
\end{aligned} \tag{7.1.39}
$$

wodurch

$$
p^{(0)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) = (\gamma - 1)\left(\rho E\right)^{(0)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) \tag{7.1.40}
$$

folgt. Hiermit erhalten wir für den führenden Term der Enthalpie pro Einheitsvolumen $(\rho H)^{(0)}$ wegen $\rho H = \rho E + p$ die Darstellung

$$
\begin{aligned}
(\rho H)^{(0)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) &= (\rho E)^{(0)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) + p^{(0)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) \\
&\overset{(7.1.40)}{=} \frac{\gamma}{\gamma - 1} p^{(0)}\left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) \\
&\overset{\text{Satz 7.6}}{=} \frac{\gamma}{\gamma - 1} P^{(0)}\left(t\right)
\end{aligned} \tag{7.1.41}
$$

und folglich

$$\nabla_{\underline{\eta}} (\rho H)^{(0)} \left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) = \underline{0}. \tag{7.1.42}$$

Schreiben wir die führende asymptotische Energiegleichung (7.1.30) in der Form

$$0 = \partial_t (\rho E)^{(0)} + (\rho H)^{(0)} \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{v}^{(0)} + \underline{v}^{(0)} \cdot \nabla_{\underline{\eta}} (\rho H)^{(0)}$$

und berücksichtigen

$$\partial_t (\rho E)^{(0)} \left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) \overset{(7.1.40)}{=} \frac{1}{\gamma - 1} \partial_t p^{(0)} \left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) \overset{\text{Satz 7.6}}{=} \frac{1}{\gamma - 1} \frac{dP^{(0)}}{dt}(t),$$

so ergibt sich unter Verwendung der Gleichungen (7.1.41) und (7.1.42) die Darstellung

$$0 = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{dP^{(0)}}{dt}(t) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} P^{(0)}(t) \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{v}^{(0)} \left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right).$$

Aufgrund der Positivität des Drucks folgt

$$\nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{v}^{(0)} \left(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t\right) = -\frac{1}{\gamma P^{(0)}(t)} \frac{dP^{(0)}}{dt}(t).$$

□

Satz 7.8.
Sei $\nabla_{\underline{x}} \cdot \underline{v}$ für alle $\mathrm{M}_\infty \in (0, \mathrm{M}')$ über das Integrationsgebiet $V = V(\mathrm{M}_\infty) \subset \mathbb{R}^d$ mit $d_{\max}(V(\mathrm{M}_\infty)) = O_s\left(\hat{L}\right)$, $\mathrm{M}_\infty \to 0$, gleichmäig beschränkt, dann folgt für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$

$$\lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} \int_V \nabla_{\underline{x}} \cdot \underline{v}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\, d\underline{x} = \int_{\tilde{V}} \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{V}^{(0)}(\underline{\eta}, t)\, d\underline{\eta}, \tag{7.1.43}$$

wobei $\tilde{V} = \lim\limits_{\mathrm{M}_\infty \to 0} V(\mathrm{M}_\infty)$ gilt.

Beweis:
Aufgrund der Beschränktheit der Integranden erweist sich dieser für alle Nullfolgen $\{\mathrm{M}_{\infty,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus $(0, \mathrm{M}')$ als Lebesgue-integrierbar über die zugehörigen $\{V(\mathrm{M}_{\infty,n})\}_{n \in \mathbb{N}}$. Zudem ergibt sich wegen $\left|V(\mathrm{M}_{\infty,n}) \setminus \tilde{V}\right| = o(1)$, $\mathrm{M}_\infty \to 0$ für jede beschränkte Funktion f

$$\int_V f(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\, d\underline{x} = \int_{\tilde{V}} f(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\, d\underline{x} + o(1), \ \mathrm{M}_\infty \to 0. \tag{7.1.44}$$

Unter Verwendung der Gleichungen (7.1.5) ergibt sich

$$\nabla_{\underline{x}} \cdot \underline{v}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty) = \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{v}^{(0)} \left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right) + o(1), \ \mathrm{M}_\infty \to 0, \tag{7.1.45}$$

so da mit

$$\begin{aligned} &\lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} \nabla_{\underline{x}} \cdot \underline{v}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty) \\ &= \lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{v}^{(0)} \left(\underline{g}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\right) \\ &\overset{(7.1.38)}{=} \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{V}^{(0)}(\underline{x}, t) \end{aligned} \tag{7.1.46}$$

punktweise Konvergenz für alle $\underline{x} \in V$ vorliegt. Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz erhalten wir mit (7.1.44)

$$\begin{aligned}
&\lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} \int_V \nabla_{\underline{x}} \cdot \underline{v}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\, d\underline{x} \\
&= \lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} \int_{\tilde{V}} \nabla_{\underline{x}} \cdot \underline{v}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty)\, d\underline{x} \\
&= \int_{\tilde{V}} \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{V}^{(0)}(\underline{\eta}, t)\, d\underline{\eta}.
\end{aligned}$$

□

Die Integration der Gleichung (7.1.38) über $\tilde{V}$ liefert

$$-\frac{1}{\gamma P^{(0)}(t)} \frac{dP^{(0)}}{dt}(t) = \frac{1}{|\tilde{V}|} \int_{\tilde{V}} \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{V}^{(0)} \left(\underline{\eta}, t\right)\, d\underline{\eta},$$

so da unter Verwendung von

$$p\left(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty\right) = P^{(0)}(t) + o(1), \ \mathrm{M}_\infty \to 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}\left(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty\right) = \frac{dP^{(0)}}{dt}(t) + o(1), \ \mathrm{M}_\infty \to 0$$

und der Positivität der Druckverteilung die Gleichung

$$\begin{aligned}
&\lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} -\frac{1}{\gamma p\left(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty\right)} \frac{\partial p}{\partial t}\left(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty\right) \\
&= -\frac{1}{\gamma P^{(0)}(t)} \frac{dP^{(0)}}{dt}(t) \\
&= \frac{1}{|\tilde{V}|} \int_{\tilde{V}} \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{V}^{(0)} \left(\underline{\eta}, t\right)\, d\underline{\eta} \\
&\overset{\text{Satz 7.8}}{=} \frac{1}{|\tilde{V}|} \lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} \int_{V(\mathrm{M}_\infty)} \nabla_{\underline{x}} \cdot \underline{v}\left(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty\right)\, d\underline{x} \\
&= \frac{1}{|\tilde{V}|} \lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} \int_{\partial V(\mathrm{M}_\infty)} \underline{v}\left(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty\right) \cdot \underline{n}\left(\underline{x}\right)\, ds
\end{aligned}$$

folgt. Im Grenzfall einer verschwindenden Mach-Zahl ergeben sich somit für Strömungsfelder $V(\mathrm{M}_\infty)$, die der Bedingung $d_{\max}(V(\mathrm{M}_\infty)) = O_s\left(\hat{L}\right)$, $\mathrm{M}_\infty \to 0$, genügen, Veränderungen des vorliegenden Druckfeldes ausschlielich durch auftretende Volumenflüsse über den Rand des Gebietes. Zudem gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} \nabla_{\underline{x}} \cdot \underline{v}\left(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty\right) &\overset{(7.1.46)}{=} \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{V}^{(0)}\left(\underline{x}, t\right) \\
&\overset{\text{Satz 7.7}}{=} -\frac{1}{\gamma P^{(0)}(t)} \frac{dP^{(0)}}{dt}(t) \\
&= \frac{1}{|\tilde{V}|} \lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} \int_{\partial V(\mathrm{M}_\infty)} \underline{v}\left(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty\right) \cdot \underline{n}\left(\underline{x}\right)\, ds,
\end{aligned}$$

so da im betrachteten Grenzfall die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes stets räumlich konstant ist und in der zeitlichen Änderung durch $O(1)$-Variationen des Drucks oder durch Volumenflüsse über den Rand des beschränkten Strömungsfeldes hervorgerufen wird.

Eine zentrale Aussage für das zweite Regime erhalten wir durch den folgenden Satz.

Satz 7.9.
Sei $V = V(\mathrm{M}_\infty) \subset \mathbb{R}^d$ mit $d_{\min}(V(\mathrm{M}_\infty)) = O_s\left(\frac{\hat{L}}{\mathrm{M}_\infty}\right)$, $\mathrm{M}_\infty \to 0$ gegeben, dann folgt

$$\lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} \nabla_{\underline{x}} \cdot \underline{v}(\underline{x}, t; \mathrm{M}_\infty) = \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{V}^{(0)}(\underline{x}, t) \;=\; 0 \tag{7.1.47}$$

und

$$P^{(0)}(t) \;=\; P_c^{(0)}. \tag{7.1.48}$$

Beweis:
Sei $B_{\underline{x}}(\underline{0}, r)$ die abgeschlossenen d-dimensionale Kugel vom Radius r, dann können wir wegen $d_{\min}(V(\mathrm{M}_\infty)) = O_s\left(\frac{\hat{L}}{\mathrm{M}_\infty}\right)$, $\mathrm{M}_\infty \to 0$ o.B.d.A.

$$B_{\underline{x}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right) \subset V(\mathrm{M}_\infty) \;\; \forall\, \mathrm{M}_\infty \in (0, \mathrm{M}')$$

voraussetzen. Somit erhalten wir ausgehend von der Gleichung (7.1.38) durch Integration über $B_{\underline{x}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)$ die Folgerung

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\gamma P^{(0)}(t)} \frac{dP^{(0)}}{dt}(t) \;&=\; -\frac{1}{\left|B_{\underline{x}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)\right|} \int_{B_{\underline{x}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)} \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \underline{V}^{(0)}(\underline{x}, t)\, d\underline{x} \\
&=\; -\frac{1}{\left|B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)\right|} \int_{\partial B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)} \underline{v}^{(0)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) \cdot \underline{n}(\underline{\eta})\, ds.
\end{aligned} \tag{7.1.49}$$

Unter Verwendung der Gleichung (7.1.22) mit der speziellen Wahl $\alpha = \frac{1}{2}$ erhalten wir für alle $\underline{\eta} \in \partial B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)$

$$v_i^{(0)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) = o(\mathrm{M}_\infty^{-\frac{1}{2}}),\; \mathrm{M}_\infty \to 0,\; i = 1, \ldots, d. \tag{7.1.50}$$

Für den führenden Druckterm innerhalb der asymptotischen Entwicklung ergibt sich damit

$$\frac{1}{\gamma P^{(0)}(t)} \frac{dP^{(0)}}{dt}(t) = O\left(\mathrm{M}_\infty^d\right) O\left(\mathrm{M}_\infty^{1-d}\right) o\left(\mathrm{M}_\infty^{-\frac{1}{2}}\right) = o\left(\mathrm{M}_\infty^{\frac{1}{2}}\right),\; \mathrm{M}_\infty \to 0.$$

Mit $P^{(0)}(t) > 0\; \forall t \in \mathbb{R}_0^+$ folgt

$$\frac{dP^{(0)}}{dt}(t) = 0,$$

wodurch Gleichung (7.1.45) in Kombination mit (7.1.38) die aufgestellte Behauptung liefert. □

Viele Verfahren zur Berechnung inkompressibler Strömungen basieren auf der Voraussetzung einer räumlich und zeitlich konstanten Dichteverteilung. Hierdurch ergibt sich die Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes als unmittelbare Folgerung aus der Kontinuitätsgleichung. Oftmals erweist sich die für das Dichtefeld getroffene Annahme aus physikalischer Sicht jedoch als zu restriktiv.

Mit Satz 7.9 liegt für das Regime der langwelligen Akustik der Nachweis vor, da sich die Divergenzfreiheit der Geschwindigkeitsverteilung im Grenzfall einer verschwindenden Mach-Zahl auch in der vorgenommenen asymptotischen Analyse der Euler-Gleichungen ergibt. Interessanterweise folgt diese Aussage bei dem verwendeten Ansatz ohne die beschriebene Bedingung an die Dichteverteilung und folglich auch nicht aus der Kontinuitätsgleichung, sondern auf der Basis der Energiegleichung in Kombination mit der Eigenschaft (7.1.36) des führenden Druckterms, die sich aus den Impulsgleichungen (7.1.27) und (7.1.28) ergibt.

Betrachten wir eine quasistatische und adiabate Strömung, so erhalten wir für die Entropie $s = p/\rho^\gamma$ aufgrund der vorliegenden Isentropie

$$0 = \frac{Ds}{Dt}(\underline{x},t) = \frac{1}{\rho^\gamma(\underline{x},t)}\frac{Dp}{Dt}(\underline{x},t) - \frac{\gamma p(\underline{x},t)}{\rho^{\gamma+1}(\underline{x},t)}\frac{D\rho}{Dt}(\underline{x},t),$$

wobei die substantielle Ableitung

$$\frac{D}{Dt} = \partial_t + \underline{v}\cdot\nabla_{\underline{x}}$$

die zeitliche Änderung entlang einer Bahnlinie beschreibt. Aufgrund der Positivität der Druck- und Dichteverteilung erhalten wir somit

$$\frac{1}{\gamma}\frac{D\ln p}{Dt}(\underline{x},t) = \frac{D\ln\rho}{Dt}(\underline{x},t).$$

Satz 7.10.
Sei $V = V(\mathrm{M}_\infty) \subset \mathbb{R}^d$ mit $d_{\max}(V(\mathrm{M}_\infty)) = O_s\left(\hat{L}\right)$, $\mathrm{M}_\infty \to 0$ gegeben, dann gilt

$$\frac{D\ln\rho^{(0)}}{Dt}(\underline{\eta},\underline{\xi},t) = \frac{1}{\gamma}\frac{D\ln P^{(0)}}{Dt}(t) \;\text{ mit }\; \frac{D}{Dt} = \partial_t + \underline{v}^{(0)}\cdot\nabla_{\underline{\eta}}.$$

Beweis:
Ausgehend von der führenden Kontinuitätsgleichung erhalten wir

$$\frac{D\rho^{(0)}}{Dt}(\underline{\eta},\underline{\xi},t) = -\rho^{(0)}(\underline{\eta},\underline{\xi},t)\nabla_{\underline{\eta}}\cdot\underline{v}^{(0)}(\underline{\eta},\underline{\xi},t),$$

so da mit Satz 7.7 in Kombination mit der Positivität der Druck- und Dichteverteilung die Darstellung

$$\frac{1}{\rho^{(0)}(\underline{\eta},\underline{\xi},t)}\frac{D\rho^{(0)}}{Dt}(\underline{\eta},\underline{\xi},t) = \frac{1}{\gamma P^{(0)}(t)}\frac{DP^{(0)}}{Dt}(t)$$

liefert. Hieraus ergibt sich direkt der behauptete Zusammenhang. □

Der obige Satz zeigt, da die führenden Terme der asymptotischen Entwicklungen für Dichte, Druck und Geschwindigkeit der Gleichung genügen, die sich für die beiden physikalischen Gröen innerhalb einer quasistatischen und adiabaten Strömung ergibt. Somit kommt dem führenden Druckterm $p^{(0)}$ im Rahmen dieser asymptotischen Entwicklung die Bedeutung einer thermodynamischen Variablen zu. Im Gegensatz hierzu entnehmen wir dem folgenden Satz, da die Kontinuitätsgleichung (7.1.24) im Fall des zweiten Regimes lediglich die Advektion der führenden asymptotischen Dichte $\rho^{(0)}$ beschreibt.

Satz 7.11.
Sei $V = V(\mathrm{M}_\infty) \subset \mathbb{R}^d$ mit $d_{\min}(V(\mathrm{M}_\infty)) = O_s\left(\frac{\hat{L}}{\mathrm{M}_\infty}\right)$, $\mathrm{M}_\infty \to 0$ gegeben, dann folgt

$$\frac{D\rho^{(0)}}{Dt}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) = 0.$$

Beweis:
Der Nachweis ergibt sich direkt durch Einsetzen der Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes (7.1.47) in Verbindung mit Gleichung (7.1.38) in die führende Kontinuitätsgleichung (7.1.24). □

Der folgende Satz belegt, da wir als weitere Konklusion der Analyse neben dem Druckterm $p^{(0)}$ auch der asymptotischen Funktion $p^{(2)}$ eine spezielle Bedeutung zuordnen können.

Satz 7.12.
Sei $V = V(\mathrm{M}_\infty) \subset \mathbb{R}^d$ mit $d_{\max}(V(\mathrm{M}_\infty)) = O_s\left(\hat{L}\right)$, $\mathrm{M}_\infty \to 0$ gegeben, dann gilt

$$\left(\partial_t \underline{m}^{(0)} + \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \left(\underline{m}^{(0)} \otimes \underline{v}^{(0)}\right) + \nabla_{\underline{\eta}} p^{(2)}\right)(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) = \underline{0}. \tag{7.1.51}$$

Beweis:
Die Aussage (7.1.51) ergibt sich direkt durch Einsetzen der Gleichung (7.1.34) in die Impulsgleichung (7.1.29). □

Der Term $p^{(2)}$ kann somit aufgrund der Gleichung (7.1.51) mit dem in den inkompressiblen Euler-Gleichungen auftretenden Druckterm identifiziert werden.

Im zweiten Regime müssen auch die langwelligen Effekte geeignet berücksichtigt werden. Daher verschwindet $\nabla_{\underline{\xi}} p^{(1)}$ innerhalb der Impulsgleichung (7.1.29) nicht notwendigerweise und wir können mit den folgenden Sätzen ein System zur Ermittlung der zeitlichen Änderung des asymptotischen Druckterm $p^{(1)}$ herleiten. Als hilfreich erweist es sich hierzu den bezüglich der kurzwelligen Skala vorliegenden Mittelwert einer asymptotischen Gröe $w^{(i)}$ im Grenzfall einer verschwinden Mach-Zahl durch einen Überstrich gemä

$$\overline{w^{(i)}}(\underline{\xi}, t) := \lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} \frac{1}{\left|B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)\right|} \int_{B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)} w^{(i)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) d\underline{\eta} \tag{7.1.52}$$

zu beschreiben.

Satz 7.13.
Sei $V = V(\mathrm{M}_\infty) \subset \mathbb{R}^d$ mit $d_{\min}(V(\mathrm{M}_\infty)) = O_s\left(\frac{\hat{L}}{\mathrm{M}_\infty}\right)$, $\mathrm{M}_\infty \to 0$ gegeben, dann gilt

$$\overline{\partial_t \underline{m}^{(0)}}(\underline{\xi}, t) + \nabla_{\underline{\xi}} P^{(1)}(\underline{\xi}, t) = \underline{0}. \tag{7.1.53}$$

Beweis:
Wegen $d_{\min}(V(\mathrm{M}_\infty)) = O_s\left(\frac{\hat{L}}{\mathrm{M}_\infty}\right)$, $\mathrm{M}_\infty \to 0$ können wir wiederum o.B.d.A.

$$B_{\underline{x}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right) \subset V(\mathrm{M}_\infty) \ \ \forall \mathrm{M}_\infty \in (0, \mathrm{M}')$$

voraussetzen. Aus der vorliegenden Eigenschaft (7.1.23) des Terms $p^{(2)}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\left|B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, r\right)\right|} \int\limits_{B_{\underline{\eta}}(\underline{0},r)} \nabla_{\underline{\eta}} p^{(2)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) \, d\underline{\eta} \\ &= \frac{1}{\left|B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, r\right)\right|} \int\limits_{\partial B_{\underline{\eta}}(\underline{0},r)} p^{(2)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) \underline{n}(\underline{\eta}) \, ds = o(1), \ r \to \infty. \end{aligned}$$

Aus der Forderung (7.1.22) erhalten wir für jede Komponente des Tensors $\underline{m}^{(0)} \otimes \underline{v}^{(0)}$ die Abschätzung

$$\left(\underline{m}^{(0)} \otimes \underline{v}^{(0)}\right)(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) = o\left(\mathrm{M}_\infty^{-\frac{1}{2}}\right), \ \forall \underline{\eta} \in \partial B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right), \ \mathrm{M}_\infty \to 0.$$

Eine Mittelung der Impulsgleichung (7.1.29) liefert somit unter Berücksichtigung des Satzes 7.6 die Gleichung

$$\begin{aligned} &\nabla_{\underline{\xi}} P^{(1)}(\underline{\xi}, t) + \overline{\partial_t \underline{m}^{(0)}}(\underline{\xi}, t) \\ &= \lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} \frac{1}{\left|B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)\right|} \int\limits_{B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0}, \frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)} \partial_t \underline{m}^{(0)} + \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \left(\underline{m}^{(0)} \otimes \underline{v}^{(0)}\right) + \nabla_{\underline{\eta}} p^{(2)} + \nabla_{\underline{\xi}} p^{(1)} \, d\underline{\eta} \\ &= \underline{0}. \end{aligned}$$

□

Satz 7.14.
Sei $V = V(\mathrm{M}_\infty) \subset \mathbb{R}^d$ mit $d_{\min}(V(\mathrm{M}_\infty)) = O_s\left(\frac{\hat{L}}{\mathrm{M}_\infty}\right)$, $\mathrm{M}_\infty \to 0$ gegeben, dann gilt

$$\partial_t P^{(1)}(\underline{\xi}, t) + \gamma P_c^{(0)} \overline{\nabla_{\underline{\xi}} \cdot \underline{v}^{(0)}}(\underline{\xi}, t) = 0. \tag{7.1.54}$$

Beweis:
Die Gleichung (7.1.39) liefert

$$(\rho E)^{(1)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) = \frac{1}{\gamma - 1} p^{(1)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) \overset{\text{Satz 7.6}}{=} \frac{1}{\gamma - 1} P^{(1)}(\underline{\xi}, t), \tag{7.1.55}$$

so da wir unter Verwendung der Eigenschaften (7.1.23) und (7.1.48) mit einer Mittelung der Energiegleichung (7.1.31) gemä (7.1.52) die Darstellung

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} \frac{\int\limits_{B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0},\frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)} \left(\partial_t (\rho E)^{(1)} + \nabla_{\underline{\eta}} \cdot (\rho H \underline{v})^{(1)} + \nabla_{\underline{\xi}} \cdot (\rho H \underline{v})^{(0)}\right)(\underline{\eta},\underline{\xi},t)\, d\underline{\eta}}{\left|B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0},\frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)\right|} \\
&\overset{(7.1.55)}{=} \partial_t P^{(1)}(\underline{\xi},t) + \lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} \frac{1}{\left|B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0},\frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)\right|} \int\limits_{B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0},\frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)} \left(\gamma p^{(0)} \nabla_{\underline{\xi}} \cdot \underline{v}^{(0)}\right)(\underline{\eta},\underline{\xi},t)\, d\underline{\eta} \\
&= \partial_t P^{(1)}(\underline{\xi},t) + \gamma P_c^{(0)} \lim_{\mathrm{M}_\infty \to 0} \frac{1}{\left|B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0},\frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)\right|} \int\limits_{B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0},\frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)} \nabla_{\underline{\xi}} \cdot \underline{v}^{(0)}(\underline{\eta},\underline{\xi},t)\, d\underline{\eta}
\end{aligned}
$$

erhalten. Aus der Definition des Mittelwertes (7.1.52) ergibt sich somit die Behauptung. □

Satz 7.15.
Sei $V = V(\mathrm{M}_\infty) \subset \mathbb{R}^d$ mit $d_{\min}(V(\mathrm{M}_\infty)) = O_s\left(\frac{\hat{L}}{\mathrm{M}_\infty}\right)$, $\mathrm{M}_\infty \to 0$ gegeben und gelte

$$\rho^{(0)}(\underline{\eta},\underline{\xi},t) = \tilde{\varrho}^{(0)}(\underline{\xi},t), \tag{7.1.56}$$

dann folgt

$$\rho^{(0)}(\underline{\eta},\underline{\xi},t) = \varrho^{(0)}(\underline{\xi}) \tag{7.1.57}$$

und

$$\overline{\partial_t \underline{v}^{(0)}}(\underline{\xi},t) + \frac{1}{\varrho^{(0)}(\underline{\xi})} \nabla_{\underline{\xi}} P^{(1)}(\underline{\xi},t) = \underline{0}. \tag{7.1.58}$$

Beweis:
Durch Mittelung der führenden Kontinuitätsgleichung (7.1.24) erhalten wir mit der Bedingung (7.1.56) unter Verwendung der aus (7.1.22) folgenden Abschätzung

$$\left(\rho^{(0)} v_i^{(0)}\right)(\underline{\eta},\underline{\xi},t) = o(\mathrm{M}_\infty^{-\alpha}),\ \forall \underline{\eta} \in \partial B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0},\frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right),\ \mathrm{M}_\infty \to 0,\ i = 1,\dots,d$$

die Darstellung

$$
\begin{aligned}
\partial_t \rho^{(0)}(\underline{\eta},\underline{\xi},t) &= \partial_t \tilde{\varrho}^{(0)}(\underline{\xi},t) \\
&= \frac{1}{\left|B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0},\frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)\right|} \int\limits_{B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0},\frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)} \partial_t \tilde{\varrho}^{(0)}(\underline{\xi},t)\, d\underline{\eta} \\
&= -\frac{1}{\left|B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0},\frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)\right|} \int\limits_{B_{\underline{\eta}}\left(\underline{0},\frac{1}{\mathrm{M}_\infty}\right)} \nabla_{\underline{\eta}} \cdot \left(\rho^{(0)} \underline{v}^{(0)}\right)(\underline{\eta},\underline{\xi},t)\, d\underline{\eta} \\
&= o\left(\mathrm{M}_\infty^{1-\alpha}\right), \mathrm{M}_\infty \to 0
\end{aligned} \tag{7.1.59}
$$

mit beliebigem aber festem $\alpha > 0$. Somit folgt durch Grenzübergang $\mathrm{M}_\infty \to 0$

$$\rho^{(0)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) = \varrho^{(0)}(\underline{\xi})$$

und wir erhalten die zweite Aussage des Satzes durch Einsetzen von

$$\begin{aligned}\overline{\partial_t \underline{m}^{(0)}}(\underline{\xi}, t) &= \overline{\underline{v}^{(0)} \underbrace{\partial_t \rho^{(0)}}_{=0}}(\underline{\xi}, t) + \overline{\rho^{(0)} \partial_t \underline{v}^{(0)}}(\underline{\xi}, t) \\ &= \varrho^{(0)}(\underline{\xi}) \overline{\partial_t \underline{v}^{(0)}}(\underline{\xi}, t)\end{aligned}$$

in die Gleichung (7.1.53) unter Berücksichtigung der Positivität des führenden Dichteterms. □

Betrachten wir innerhalb der Gleichung (7.1.59) den Differenzenquotienten anstelle des Differentialquotienten, so erhalten wir bei beliebigem aber festem $\alpha > 0$

$$\rho^{(0)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t + \Delta t) - \rho^{(0)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) = \Delta t \, o\left(\mathrm{M}_\infty^{1-\alpha}\right), \mathrm{M}_\infty \to 0$$

und folglich

$$\rho^{(0)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t + \widetilde{\Delta t}) - \rho^{(0)}(\underline{\eta}, \underline{\xi}, t) = \Delta t \, o(1), \mathrm{M}_\infty \to 0$$

mit $\widetilde{\Delta t} = \frac{\Delta t}{\mathrm{M}_\infty^{\alpha-1}}$. Dichtevariationen der Gröenordnung $O_s(1)$ können somit nicht auf Zeitskalen der Gröenordnung $O\left(\mathrm{M}_\infty^{\alpha-1}\right)$ auftreten. Um $O_s(1)$-Veränderungen der Dichte erwarten zu dürfen, müssen daher längere Zeitabschnitte $\Bigg($zum Beispiel in der Gröenordnung $O_s\left(\frac{\hat{L}}{|\hat{\underline{v}}_\infty| \mathrm{M}_\infty}\right)\Bigg)$ betrachtet werden.

Bemerkung 7.16.
Setzen wir innerhalb der Gleichungen (7.1.54) und (7.1.58) für den Geschwindigkeitsvektor die Vertauschbarkeit der Mittelwertbildung mit der Differenzierbarkeit nach der Zeit respektive aller partiellen Ableitungen bezüglich der langwelligen Skala voraus, so erhalten wir mit

$$\partial_t P^{(1)}(\underline{\xi}, t) + \gamma P_c^{(0)} \nabla_{\underline{\xi}} \cdot \overline{\underline{v}^{(0)}}(\underline{\xi}, t) = 0 \tag{7.1.60}$$

$$\partial_t \overline{\underline{v}^{(0)}}(\underline{\xi}, t) + \frac{1}{\varrho^{(0)}(\underline{\xi})} \nabla_{\underline{\xi}} P^{(1)}(\underline{\xi}, t) = \underline{0} \tag{7.1.61}$$

ein System partieller Differentialgleichungen. Hiermit kann bei gegebener räumlicher Verteilung der führenden asymptotischen Druck- und Dichteterme die zeitliche Veränderung des Terms $P^{(1)}$ ermittelt werden.

Fordern wir zudem $\nabla_{\underline{\xi}} \cdot \partial_t \overline{\underline{v}^{(0)}}(\underline{\xi}, t) = \partial_t \nabla_{\underline{\xi}} \cdot \overline{\underline{v}^{(0)}}(\underline{\xi}, t)$, so erhalten wir durch Kombination von (7.1.60) und (7.1.61) die Wellengleichung

$$\partial_t^2 P^{(1)}(\underline{\xi}, t) - \nabla_{\underline{\xi}} \cdot \left(c(\underline{\xi}) \nabla_{\underline{\xi}} P^{(1)}(\underline{\xi}, t)\right) = 0$$

mit

$$c(\underline{\xi}) = \frac{\gamma P_c^{(0)}}{\varrho^{(0)}(\underline{\xi})},$$

wodurch deutlich wird, da der asymptotische Term $P^{(1)}$ langwellige akustische Phänomene beschreibt.

Literatur

[1] J. Kevorkian, J.D. Cole – Multiple Scale and Singular Perturbation Methods. (Springer Verlag, Applied Mathematical Sciences 114 1996)

[2] N.G. de Bruijn – Asymptotic Methods in Analysis. (Dover Publications 1981, Reprint of the third edition 1970)

[3] A. Erdélyi – Asymptotic Expansions. (Dover Publications, 1956)

[4] W. Schneider – Mathematische Methoden der Strömungsmechanik. (Vieweg Verlag, 1978)

[5] A. Meister – Zur mathematischen Fundierung einer Mehrskalenanalyse der Euler-Gleichungen. (Hamburger Beiträge zur Angewandten Mathematik, Reihe F: Computational Fluid Dynamics and Data Analysis 1, 1997)

[6] Th. Sonar – Mathematische Einführung in die Strömungsmechanik. (Vorlesung im Sommersemester 1996, Universität Hamburg, Manuskript)