Prof. Dr. R. Pulch
SoSe 2009

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften
Angewandte Mathematik/Numerische Analysis

Klausur zu Einführung in die Numerische Mathematik

28. Juli 2009, 14:00-16:00 Uhr

Aufgabenblatt

Aufgabe 1: *Lineare Gleichungssysteme.* (20 Punkte)

Gegeben ist eine Matrix und zwei rechte Seiten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{b} = \begin{pmatrix} -5.01 \\ 9.98 \\ 7.99 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Zerlegung $PA = LR$ mit partieller Pivotisierung (Spaltenpivotsuche) und geben Sie die Matrizen P, L, R aus dem Endergebnis jeweils explizit an. Begründen Sie mit dem Ergebnis, dass die Matrix A regulär ist.

b) Berechnen Sie die Konditionszahl der Matrix A bezüglich der Matrixnorm $\|\cdot\|_\infty$ indem Sie ohne Herleitung $\|A^{-1}\|_\infty = 4.6$ verwenden.

c) Sei $Ax = b$ und $A\tilde{x} = \tilde{b}$. Schätzen Sie die absolute Abweichung $\|\tilde{x}-x\|_\infty$ und die relative Abweichung $\frac{\|\tilde{x}-x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ jeweils nach oben ab und geben Sie den Zahlwert (als Bruch) der oberen Schranke an.

Aufgabe 2: *Nichtlineare Gleichungen.* (20 Punkte)

Die Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2} - a$ mit $0 < a < 1$ beschreibt die nichtlineare Gleichung $f(x) = 0$. Eindeutige Lösung im Definitionsgebiet ist $\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{a}} > 1$.

a) Betrachten Sie das kompakte Intervall $U = [\hat{x} - 1, \hat{x} + 1]$. Leiten Sie eine Konstante $C > 0$ in Abhängigkeit von a her, so dass für die Iterierten aus dem gewöhnlichen Newton-Verfahren gilt

$$|x^{k+1} - \hat{x}| \leq C \cdot |x^k - \hat{x}|^2$$

sofern $x^k \in U$. Bestimmen Sie ein $0 < \delta \leq 1$, welches die Konvergenz des gewöhnlichen Newton-Verfahrens für alle Startwerte $x^0 \in [\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta]$ garantiert.

b) Es sei nun $a = \frac{1}{2}$, d.h. die Lösung ist $\hat{x} = \sqrt{2}$. Beweisen Sie, dass das vereinfachte Newton-Verfahren mit Startwert $x^0 = 1$ gegen die Lösung konvergiert.

Aufgabe 3: *Lineare Ausgleichsrechnung.* (20 Punkte)

Das lineare Ausgleichsproblem

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} \|Ax-b\|_2^2 \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soll gelöst werden.

a) Begründen Sie, dass die Lösung dieses Problems hier eindeutig ist.

b) Überführen Sie die Matrix A durch Householder-Transformationen in eine obere Dreiecksmatrix. Transformieren Sie den Vektor b analog, um dann die Lösung $\hat{x}$ des Ausgleichsproblems zu bestimmen.

c) Geben Sie den Wert $\|r\|_2$ mit $r := A\hat{x} - b$ und $\hat{x}$ aus Aufgabenteil (b) an ohne dabei den Vektor r auszurechnen.

Aufgabe 4: *Polynominterpolation.* (20 Punkte)

Die Stützpunkte (x_i, y_i) mit

i	0	1	2	3
x_i	-2	0	1	4
y_i	3	1	4	-2

sollen durch Polynome interpoliert werden. Verwenden Sie das Schema der dividierten Differenzen um die folgenden Interpolationspolynome zu bestimmen. Geben Sie die resultierenden Polynome bezüglich einer Newton-Basis an (d.h. es ist keine Umrechnung in die Taylor-Basis/Monom-Basis notwendig).

a) p_1 interpoliert die drei Stützpunkte $i = 0, 1, 2$.

b) p_2 interpoliert die drei Stützpunkte $i = 1, 2, 3$.

c) p_3 interpoliert alle vier Stützpunkte $i = 0, 1, 2, 3$.

Werten Sie desweiteren noch p_3 mit einer geeigneten Modifikation des Horner-Schemas an der Stelle $x = 2$ aus.

Aufgabe 5: *Splineinterpolation.* (20 Punkte)

Die Funktion $f(x) = 1 + \sin(2\pi x)$ wird im Intervall $[0, 1]$ an den äquidistanten Stellen $x_i := \frac{i}{n}$ für $i = 0, 1, \ldots, n$ mit einem periodischen Spline $s_n(x)$ interpoliert.

a) Geben Sie im Fall $n = 4$ die Einträge der Matrix A und der rechten Seite b des korrespondierenden linearen Gleichungssystems $Au = d$ als Zahlenwerte (Brüche) an. Die Lösung soll nicht berechnet werden! Wie hängen die Unbekannten u_i mit dem gesuchten Spline s_n zusammen?

b) Leiten Sie ein möglichst kleines $n \in \mathbb{N}$ her, welches einen Approximationsfehler

$$|f(x) - s_n(x)| \leq \tfrac{3\pi^4}{4} \cdot 10^{-8} \qquad \text{für beliebiges} \quad x \in \mathbb{R}$$

garantiert.

Aufgabe 6: *Quadratur.* (20 Punkte)

Zur Approximation der bestimmten Integrale

$$I(f) := \int_{-1}^{+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

bei stetiger Funktion $f : [-1, +1] \to \mathbb{R}$ dient die Quadraturformel

$$J(f) := \alpha f(-\tfrac{1}{2}) + \beta f(0) + \gamma f(\tfrac{1}{2})$$

mit den Gewichten $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Gewichte derart, dass die Quadraturformel exakt ist für alle Polynome vom Grad höchstens 2. Welches ungünstige Verhalten tritt bei diesen Gewichten hier auf?

b) Was ist der maximale Wert $k \in \mathbb{N}$ für den die Quadraturformel mit den Gewichten aus Aufgabenteil (a) noch exakt für alle Polynome mit Grad höchstens k ist? (Beweis!)

c) Transformieren Sie Knoten und Gewichte der Quadraturformel J um das Integral einer stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ über beliebigem Intervall $[a, b]$ $(a < b)$ zu approximieren. Geben Sie die transformierten Knoten und Gewichte an.

d) Konstruieren Sie aus dem Ergebnis von Aufgabenteil (c) eine Summenformel zur Approximation des Integrals über einem Intervall $[c, d]$ $(c < d)$, d.h. dieses wird in n Teilintervalle zerlegt. Geben Sie die resultierende Formel an. Welchen Nachteil besitzt diese Summenformel gegenüber der zusammengesetzten Simpson-Regel/Kepler-Fassregel?

Aufgabe 7: *Fehleranalyse.* (20 Punkte)

Gegeben sind die beiden Funktionen

$$f(x) = (2 - x)^2 \qquad \text{und} \qquad g(x) = \frac{1}{(2 + x)^2}$$

für $-2 < x < 2$.

a) Bestimmen Sie die absoluten und die relativen Konditionszahlen zu beiden Funktionen in Abhängigkeit von x. Für welche Werte x wird die relative Konditionszahl jeweils beliebig hoch? Wie nennt man den dafür verantwortlichen Effekt?

b) Es gilt $a := f(\sqrt{3}) = g(\sqrt{3})$. Es soll a über die Auswertung von f bzw. g an der Näherung $\hat{x} := 1.7 \approx \sqrt{3} = 1.7321\ldots$ berechnet werden. Welche der Varianten f oder g ist im Sinne des erwarteten relativen Fehlers dabei vorzuziehen? (Begründung!)

c) Die Funktion f wird nun über $f(x) = (2 - x) \cdot (2 - x)$ ausgewertet (erst Subtraktion, dann Multiplikation). Durch Rundungsfehler entstehe die Auswertung $\tilde{f}(x)$ für eine Maschinenzahl $x \in (-2, 2)$ bei Annahme einer idealen Arithmetik. Geben Sie eine reelle Zahl $\tilde{x}$ an, so dass $\tilde{f}(x) \doteq f(\tilde{x})$ gilt, d.h. Linearisierungen von Fehlertermen sind erlaubt. Zeigen Sie dann $|\tilde{x} - x| \dot{\leq} 6\varepsilon_0$ mit der Maschinengenauigkeit ε_0. Ist dieser Algorithmus zur Auswertung von f gutartig/stabil? (Begründung!)