Prof. Dr. M. Ehrhardt
Dr. M. Brunk
SoSe 2010

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften
Angewandte Mathematik/Numerische Analysis

Klausur zu
Einführung in die Numerische Mathematik

20. Juli 2010, 10:15-11:45 Uhr

Aufgabenblatt

Modus: Von den 5 Aufgaben gehen die 4 besten in die Bewertung ein.
Maximalpunktzahl sind somit 80 Punkte.
Zum Bestehen der Klausur reichen 40 Punkte.

Aufgabe 1: *Lineare Gleichungssysteme.* (10+3+7 Punkte)
Gegeben sei

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 & 4 \\ 8 & 17 & 3 & 11 \\ 0 & 3 & 8+\alpha & 9 \\ 4 & 11 & 9 & 17-\alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Für welche α existiert die Cholesky-Zerlegung von A_α?

(b) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung von A_3.

(c) Bestimmen Sie aus der Cholesky-Zerlegung auch die LR-Zerlegung von A_3.

Hinweis: Verwenden Sie für Aufgabenteil (a) den gleichen Ansatz wie für Aufgabenteil (b).

Aufgabe 2: *Lineare Ausgleichsrechnung.* (10+10 Punkte)

(a) Eine Funktion f, die an den Stützstellen $x_i, 1 \le i \le 5$, vorgegeben ist, soll durch ein Polynom $p \in \mathbb{P}_2$ derart approximiert werden, dass

$$\sum_{i=1}^{5} |p(x_i) - f(x_i)|^2$$

unter allen Polynomen zweiten Grades minimal ist. Bestimmen Sie das Polynom.

i	1	2	3	4	5
x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	-1	1	2	1	1

(b) Gegeben seien die Punkte $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, n$, wobei die x_i paarweise verschieden seien. Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i, y_i)$$

der vorgegebenen Punkte auf der Ausgleichsgeraden liegt.

Aufgabe 3: *Spline-Interpolation.* (11+9 Punkte)

(a) Bestimmen Sie $p \in \mathbb{P}_3$ so, dass

$$s(x) := \begin{cases} p(x), & x \in [0,1) \\ (2-x)^3, & x \in [1,2] \end{cases}$$

ein kubischer Spline zum Gitter $\Delta = \{0,1,2\}$ mit $s(0) = 0$ ist.

(b) Entscheiden Sie für jede der folgenden Funktionen, zu welchen Spline-Räumen $S_k(0,1,2)$ sie gehören und begründen Sie Ihre Entscheidung.

$$(i) \quad \Delta = \{0,1,2\}, \qquad s(x) := \begin{cases} x^3 + 2x + 1, & 0 \le x < 1 \\ x^2 + 2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$(ii) \quad \Delta = \{0,1,2\}, \qquad s(x) := x^2 + |x-1|\,, \qquad x \in [0,2]$$

$$(iii) \quad \Delta = \{0,1,2\}, \qquad s(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x + 1, & 0 \le x < 1 \\ -4.5x^2 + 11x - 4, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Aufgabe 4: *Quadratur* (10+3+7 Punkte)

(a) Zur näherungsweisen Berechnung des Integrals

$$I[f] = \int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)\,dx$$

wird die $(m+1)$-punktige interpolatorische Quadraturformel

$$Q_m[f] = \sum_{i=0}^{m} g_i f(x_i)$$

betrachtet. Bestimmen Sie zu den vorgegebenen Knoten $\{-1,0,1\}$ die Gewichte von Q_2, so dass die Quadraturformel möglichst hohen Exaktheitsgrad hat. Wie hoch ist der Exaktheitsgrad genau?

(b) Gegeben sei das Integral

$$I = \int_0^{\pi} \sin^4 x\,dx.$$

Berechnen Sie mit der zusammengesetzten Simpson-Regel eine Näherung für I, wobei der Integrand an $n = 5$ Stellen ausgewertet werden soll.
<u>Hinweis:</u> $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin(\frac{3\pi}{4})$

(c) Der Fehler der zusammengesetzten Simpson-Regel $J_n(f)$ für ein Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ lässt sich abschätzen durch

$$|I(f) - J_n(f)| \le \frac{b-a}{180} h^4 \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

mit $h = \frac{b-a}{n}$. Geben Sie damit eine Fehlerschätzung für Ihre Werte aus (b) an. Wieviele Funktionsauswertungen sind hinreichend, um bei der Berechnung von I in (b) einen Fehler von höchstens 10^{-2} garantieren zu können?
<u>Hinweis:</u> $\left(\frac{20}{3}\pi^5\right)^{\frac{1}{4}} \approx 6,7$

Aufgabe 5: *Fixpunktaufgabe.* (10+4+6 Punkte)

Sei $I := [-1,1] \times [-1,1]$ und die Funktion $f : I \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x) = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} \ln(1 + {x_1}^2 + {x_2}^2) - 1 \\ {x_1}^2 + {x_2}^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f in I genau einen Fixpunkt besitzt.

(b) Führen Sie mit $x^{(0)} = (0,0)^\top$ zwei Schritte der Fixpunktiteration durch und geben Sie eine a-posteriori-Fehlerabschätzung für $x^{(2)}$ an.

(c) Wie viele Iterationsschritte sind hinreichend, um ausgehend vom Startvektor $x^{(0)} = (0,0)^\top$ den Fixpunkt mit einem Fehler von höchstens 10^{-3} zu approximieren?

<u>Hinweis:</u> $\ln(\frac{65}{64}) \approx 0,0155$.