Prof. Dr. R. Pulch
SoSe 2009

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL
Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften
Angewandte Mathematik/Numerische Analysis

Nachklausur zu Einführung in die Numerische Mathematik

21. Oktober 2009, 16:00-18:00 Uhr

Aufgabenblatt

Aufgabe 1: *Quadratur.* (20 Punkte)

Das gewichtete Integral

$$I(f) := \int_{-1}^{1} (x^2 + 1) \cdot f(x) \, \mathrm{d}x$$

für $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ soll mittels der Formel

$$J(f) := \alpha \cdot (f(x_1) + f(x_2))$$

mit den Knoten $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ für $x_1 \neq x_2$ und dem Gewicht $\alpha \in \mathbb{R}$ approximiert werden.

a) Bestimmen Sie x_1, x_2, α derart, dass die Approximation exakt ist für alle Polynome f vom Grad höchstens 2.

b) Was ist das maximale $k \in \mathbb{N}$, für das die Approximation mit den Parametern aus Aufgabenteil (a) noch exakt für alle Polynome vom Grad höchstens k ist?

c) Kann der Wert k aus Aufgabenteil (b) erhöht werden, indem man eine andere Formel $\tilde{J}(f) = \tilde{\alpha} \cdot f(\tilde{x}_1) + \tilde{\beta} \cdot f(\tilde{x}_2)$ mit neuen Knoten und Gewichten verwendet? (Begründen Sie Ihre Aussage.)

Aufgabe 2: *Lineare Gleichungssysteme.* (20 Punkte)

Gegeben ist die symmetrische positiv definite Matrix: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

In den folgenden Teilaufgaben sind die Endergebnisse aus den Zerlegungen explizit in separaten Matrizen anzugeben.

a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung $A = LR$.

b) Bestimmen Sie die rationale Cholesky-Zerlegung $A = \tilde{L} D \tilde{L}^\top$ mittels der LR-Zerlegung aus Aufgabenteil (a).

c) Berechnen Sie die gewöhnliche Cholesky-Zerlegung $A = \hat{L} \hat{L}^\top$ aus der rationalen Cholesky-Zerlegung in Aufgabenteil (b).

d) Bestimmen Sie eine a-priori obere Schranke C für die Beträge der Einträge im Cholesky-Faktor $\hat{L} = (\hat{l}_{ij})$, d.h. es gilt $|\hat{l}_{ij}| \leq C$ für alle i, j. Verwenden Sie dazu die Einträge in A (und nicht die Ergebnisse aus den Aufgabenteilen (b) oder (c)).

Aufgabe 3: *Fehleranalyse.* (20 Punkte)

Die Auswertung s einer quadratischen Form $x^\top Ax$ mit einem Vektor $x = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ und einer symmetrischen Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ besitzt die Formel

$$s(x_1, x_2, a_{11}, a_{12}, a_{22}) = x_1 \cdot x_1 \cdot a_{11} + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot a_{12} + x_2 \cdot x_2 \cdot a_{22}.$$

a) Bestimmen Sie jeweils die drei absoluten und relativen Konditionszahlen bezüglich der Abhängigkeit des Werts s von den drei Eingabedaten x_1, a_{11}, a_{12}.

b) Geben Sie unter Annahme einer idealen Arithmetik eine Formel für einen rundungsfehlerbehafteten Wert $\tilde{s}$ an, der bei Auswertung des obigen Ausdrucks s entsteht. Dabei ist eine Reihenfolge der enthaltenen arithmetischen Operationen willkürlich festzusetzen.

c) Leiten Sie mit der Formel aus Augabenteil (b) abgeänderte Werte $\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{12}, \tilde{a}_{22}$ her, so dass $\tilde{s} = s(x_1, x_2, \tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{12}, \tilde{a}_{22})$ gilt. Schätzen Sie dann die relativen Abweichungen $|\tilde{a}_{ij} - a_{ij}|/|a_{ij}|$ ab. Verwenden Sie dabei Linearisierungen. Ist die Auswertung von s stabil im Sinne der Rückwärtsanalyse? (Begrüngung!)

Aufgabe 4: *Polynominterpolation.* (20 Punkte)

Die Funktion $f(x) = 2\sin(\frac{\pi}{2}x) - x^3 + 1$ soll an den Stützstellen $(x_i, f(x_i))$ mit $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ interpoliert werden. Die zugehörigen Funktionswerte sind $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = 2$, $f(x_3) = -7$.

a) Werten Sie mit dem Schema von Aitken-Neville das Interpolationspolynom p zu den drei Stützstellen $i = 0, 1, 2$ sowie das Interpolationspolynom q zu allen vier Stützstellen $i = 0, 1, 2, 3$ jeweils an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ aus.

b) Gegen Sie mittels der Restgliedformel eine (möglichst niedrige) obere Schranke C an, so dass $|f(\frac{1}{2}) - q(\frac{1}{2})| \leq C$ mit dem Interpolationspolynom q aus Aufgabenteil (a) gilt. (Da Taschenrechner nicht erlaubt sind, darf der Ausdruck für C noch Terme wie z.B. $\frac{4\cdot 11}{9\cdot 17}$ enthalten ohne weiterzurechnen.)

Aufgabe 5: *Nichtlineare Gleichungen.* (20 Punkte)

Das nichtlineare Gleichungssystem

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} {x_1}^2 + {x_2}^2 - 2 \\ {x_1}^2 - {x_2}^2 \end{pmatrix} = 0$$

besitzt die Lösung $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (1, 1)$.

a) Berechnen Sie die Funktionalmatrix DF. Zeigen Sie, dass die Funktionalmatrix DF an der Stelle $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (1, 1)$ regulär ist. Was kann man daraus bereits für die Konvergenzeigenschaften des (gewöhnlichen) Newton-Verfahrens folgern?

b) Bestimmen Sie einen Abstand $r > 0$, so dass das (gewöhnliche) Newton-Verfahren für jeden Startwert $(x_1^0, x_2^0) \in \mathcal{K}$ mit

$$\mathcal{K} := \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1 - \hat{x}_1|, |x_2 - \hat{x}_2|\} \leq r\big\}$$

gegen $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (1, 1)$ konvergiert.

Aufgabe 6: *Lineare Ausgleichsrechnung.* (20 Punkte)

Gegeben sind Daten $(t_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ für $i = 1, \ldots, m$ $(m > 3)$ mit $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m$. Diese Daten werden mit einer Funktion der Form $g(t) = a + bt^2 + ct^4$ approximiert, wobei die Parameter a, b, c geeignet zu bestimmen sind.

a) Formulieren Sie die Koeffizientenmatrix A zum korrespondierenden Ausgleichsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^3} \|Ax - y\|_2^2,$$

wobei $x := (a, b, c)^\top$ und $y := (y_1, \ldots, y_m)^\top$ gilt.

b) Die Normalgleichungen zum Ausgleichsproblem stellen ein lineares Gleichungssystem $Bx = b$ zur Bestimmung der unbekannten Parameter dar. Geben Sie Formeln für die Komponenten der Matrix B und der rechten Seite b an.

c) Nun sollen die Daten mit einer Funktion der Form $\tilde{g}(t) = \tilde{a} + \tilde{b}t^2$ approximiert werden. Es sei $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ die Lösung des zugehörigen linearen Ausgleichsproblems und $\tilde{r}(\tilde{x})$ das Residuum. Beweisen Sie $\|r(x)\|_2 \leq \|\tilde{r}(\tilde{x})\|_2$, wobei r und x das Residuum und die Lösung zum linearen Ausgleichsproblem bezüglich der Funktion g sind.

Aufgabe 7: *Splines.* (20 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion $s : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$s(x) = \begin{cases} 3 + \alpha x - x^2 + \beta x^3 & \text{für } \ -1 \leq x \leq 1, \\ 2 + \gamma x - \delta x^2 + \frac{2}{3}x^3 & \text{für } \ 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Menge aller Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ für welche die Funktion s ein kubischer Spline mit natürlichen Randbedingungen bezüglich der drei Knoten $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ ist.

b) Geben Sie eine beliebige Basis des Raums der kubischen Splines zu den drei Knoten $x_0 = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ an. (Die Basis enthält dabei Funktionen $\Phi_i : [x_0, x_2] \to \mathbb{R}$.)