Prof. Dr. M. Ehrhardt
Dr. M. Brunk
WiSe 2010/11

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften
Angewandte Mathematik/Numerische Analysis

Nachklausur zur Einführung in die Numerische Mathematik

07. Oktober 2010, 10:15-11:45 Uhr

Aufgabenblatt

Modus: Von den 5 Aufgaben gehen die 4 besten in die Bewertung ein.
Maximalpunktzahl sind somit 80 Punkte.
Zum Bestehen der Klausur reichen 40 Punkte.

Aufgabe 1: *Lineare Gleichungssysteme.* (7+5+8 Punkte)
Gegeben sei das Gleichungssystem

$$Ax = b \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 9 & 9 \\ 1 & 11 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 7.5 \\ 20.5 \\ 26 \\ 9.5 \end{pmatrix}.$$

a) Führen Sie den Gaußalgorithmus durch und bestimmen Sie so die Zerlegung $A = LR$. Geben Sie alle Zwischenschritte der Zerlegung, sowie die Matrizen L, R explizit an.

b) Führen Sie anschließend die Vorwärts- und Rückwärtssubstitution durch, um die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ zu erhalten.

c) Wie ändert sich die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$, wenn b durch Δb gestört wird mit

$$\Delta b = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}. \qquad \text{Verwenden Sie} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{32}{3} & -9 & \frac{10}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{15}{2} & 7 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 5 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

und vergleichen Sie den relativen Fehler mit der Abschätzung des relativen Fehlers aus der Vorlesung. Verwenden Sie dazu die $\|\cdot\|_\infty$-Norm.

Aufgabe 2: *Matrix- und Vektornormen.* (10+6+4 Punkte)
Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$. In $\mathbb{R}^{n\times n}$ sei folgende Matrixnorm definiert:

$$\|A\|_{\max} := n \max_{ij} |a_{ij}|\,.$$

a) Zeigen Sie, dass es sich dabei um eine Norm handelt.

b) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{\max}$ konsistent bezüglich der Euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ im $\mathbb{R}^n$ ist.

c) Begründen Sie, dass die obige Matrixnorm nicht von einer Vektornorm induziert sein kann.

Aufgabe 3 : *Interpolation* (6+4+6+4 Punkte)

Gegeben sind die vier Stützstellen

i	0	1	2	3
x_i	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
y_i	1	4	4	1

a) Bestimmen Sie die Lagrange-Polynome $L_i(x)$, $i = 0, 1, 2$ für die ersten drei Stützstellen x_0, x_1, x_2. Geben Sie die Polynome in der Taylor-Basis (Monome) an. Berechnen Sie über die Lagrange-Polynome das Interpolationspolynom $P(x)$ für diese Stützstellen. Verifizieren Sie die Interpolationseigenschaft.

b) Geben Sie für die obigen Stützstellen die vier Basispolynome nach Newton an. Achten Sie dabei auf die Reihenfolge der Stützstellen.

c) Berechnen Sie nur für die ersten drei Stützstellen die dividierten Differenzen. Bestimmen Sie nun aus den dividierten Differenzen das Interpolationspolynom $P(x)$.
Verifizieren Sie, dass ihr Ergebnis die drei Stützstellen interpoliert.

d) Berechnen Sie nun die dividierten Differenzen zu allen vier Stützstellen, indem Sie Aufgabenteil **c)** entsprechend erweitern.
Stellen Sie das entsprechende Interpolationspolynom $Q(x)$ auf und verifizieren Sie wieder die Interpolationseigenschaft.

Aufgabe 4 : *Iterative Löser* (6+6+4+4 Punkte)

Gegeben seien

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Iterationsmatrizen J des Jacobi-Verfahrens und G des Gauß-Seidel-Verfahrens explizit für das obige Problem an.

b) Führen Sie ausgehend vom Startwert $x^{(0)}$ jeweils die ersten beiden Schritte des Jacobi- und des Gauß-Seidel-Verfahrens durch.

c) Zeigen Sie, dass das Jacobi-Verfahren und das Gauß-Seidel-Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ mit dem Startwert $x^{(0)}$ gegen die Lösung des Gleichungssystem $Ax = b$ konvergieren.

d) Sei nun $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit. Für das *relaxierte Gesamtschrittverfahren* gilt die folgende Iterationsvorschrift:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \ldots, n,$$

für ein $\omega \in \mathbb{R}$. Geben Sie die Iterationsmatrix des relaxierten Gesamtschrittverfahrens im Allgemeinen an.

Aufgabe 5 : *Fixpunktaufgabe* (12+8 Punkte)

Gegeben sei $f : I \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2^{\frac{x_1}{2}} \\ 1 + \frac{1}{10}(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad I := [1,2] \times [1,2].$$

a) Zeigen Sie unter Verwendung des Banach'schen Fixpunktsatzes, dass f in I genau einen Fixpunkt $\hat{x}$ besitzt. Versehen Sie dazu den $\mathbb{R}^2$ mit der Maximumsnorm.
(Hinweis: $\ln(2) \approx 0.693$)

b) Wie viele Fixpunktiterationen mit Startvektor $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind hinreichend um $\hat{x}$ mit einer Genauigkeit von 10^{-2} approximieren zu können? Verwenden Sie auch hierzu den Banach'schen Fixpunktsatz.
(Hinweise: Die Lipschitzkonstante aus (a) beträgt $L = \frac{4}{5}$; $\frac{\ln 10^{-2}}{\ln 0.8} \approx 20.64$)