Prof. Dr. M. Ehrhardt
D. Shcherbakov, M.Sc.
Summer Term 2012

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Mathematik und Naturwissenschaften
Angewandte Mathematik / Numerische Analysis

Numerical Analysis and Simulation II: Partial Differential Equations (PDEs)

Exercise Sheet 11 - Lineare Finite Elemente, Transformationsformel, inverse Ungleichung

Return of Exercise Sheet: July 12, 2012 (before the lecture)

Homework 31: (3 (0.5+1+0.5+1) Points)

Das Dreieck T sei durch die Eckpunkte (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$ gegeben. Die zugehörigen *linearen Basisfunktionen* sind durch $b_j(x_k, y_k) = \delta_{jk},\ j, k = 1, 2, 3$ bestimmt.
Zeigen Sie:

1. $$b_j(x,y) = \det\begin{pmatrix}1 & x & y\\ 1 & x_{j+1} & y_{j+1}\\ 1 & x_{j+2} & y_{j+2}\end{pmatrix} \Big/ \det\begin{pmatrix}1 & x_j & y_j\\ 1 & x_{j+1} & y_{j+1}\\ 1 & x_{j+2} & y_{j+2}\end{pmatrix},$$
   wobei Indizes modulo 3 zu verstehen sind.

2. Es gilt
   $$\nabla b_j(x,y) = \frac{1}{2\,|T|}\begin{pmatrix}y_{j+1} - y_{j+2}\\ x_{j+2} - x_{j+1}\end{pmatrix},$$
   wobei $|T|$ den Flächeninhalt von T bezeichnet.

3. Für die Einträge in die *lokale Elementmatrix* $A_T = (a_{jk})_{j,k=1,2,3}$ gilt
   $$a_{jk} = \int_T \nabla b_j (\nabla b_k)^\top\,dx = \frac{|T|}{(2\,|T|)^2}\begin{pmatrix}y_{j+1} - y_{j+2}, & x_{j+2} - x_{j+1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_{k+1} - y_{k+2}\\ x_{k+2} - x_{k+1}\end{pmatrix}.$$

4. Die lokale Elementmatrix ist gegeben durch
   $$A_T = |T|\; GG^\top$$
   mit
   $$G = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Homework 32: (4 (1+3) Points)

Sei $\widetilde{T}$ das Einheitsdreieck und $T_j \in \tau$ gegeben durch die Eckpunkte $X_i = (x_i, y_i), i = 1, 2, 3$.
In der Vorlesung wurde gezeigt, daß $F_{T_j} : \widetilde{T} \to T_j,\ F_{T_j}(\tilde{x}) = B\tilde{x} + b$, $\widetilde{T}$ auf T_j abbildet.

1. Berechnen Sie $\det F'_{T_j}(\tilde{x})$.

2. Sei B regulär und $v \in H^2(T_j)$. Zeigen Sie, daß dann $\hat{v} := v \circ F_{T_j} \in H^2(\widetilde{T})$ gilt und eine Konstante $c > 0$ existiert mit

$$|\hat{v}|_{H^2(\widetilde{T})} \leq c\, \|B\|^2\, |\det B|^{-\frac{1}{2}}\, |v|_{H^2(T_j)}\,.$$

Homework 33: (3 Points)

Es sei V_h der Raum der linearen finiten Elemente über einer *quasi–uniformen* Triangulierung τ eines polygonalen Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.
Zeigen Sie: Unter der Voraussetzung $h/h_{T_j} \leq \nu$ für alle $T_j \in \tau$, gilt die *inverse Ungleichung*

$$\|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{C}{h}\, \|v_h\|_{L^2(\Omega)}$$

Sie dürfen dabei benutzen, daß

$$\|v_h\|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{60} \sum_{T_j \in \tau} \Big(3 \sum_i v^2_{i,T_j} + 8 \sum_{i<k} v^2_{ik,T_j} + 27 v^2_{s,T_j} \Big)\, |T_j|$$

gilt. Dabei sind v_{i,T_j} die Funktionswerte der linearen Funktion $v_h|_{T_j}$ in den Ecken, v_{ik,T_j} die Funktionswerte in den Seitenmittelpunkten und v_{s,T_j} der Wert im Schwerpunkt.