Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

Sommersemester 2001

1. Übungsblatt zur Vorlesung "Höhere Numerik"

(nichtlineare Gleichungssysteme, Newton–Verfahren)

1. Aufgabe (2 Punkte)

Eine Lösung der Gleichung $x^3 - 5x^2 + 4x - 3 = 0$ soll in der Nähe von $x = 4$ iterativ berechnet werden. Wählen Sie k in der folgenden Iterationsformel so, daß eine schnelle Konvergenz erreicht wird, und berechnen Sie die Lösung auf 4 korrekte Dezimalen.

$$x_{n+1} = \frac{3 + (k-4)x_n + 5x_n^2 - x_n^3}{k}.$$

2. Aufgabe (3 Punkte (1.5+1.5))

a) Beweisen Sie folgendes Kriterium für eine *ganzzahlige Konvergenzordnung* p:
Sei $\varphi \in C^p(I), I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, und x^* ein Fixpunkt von φ. Ist

$$| \varphi'(x^*) | < 1 \qquad \text{für } p = 1$$

bzw.

$$\left.\begin{array}{rcl} \varphi^{(k)}(x^*) & = & 0 \text{ für alle } k = 1, \ldots, p-1 \\ \varphi^{(p)}(x^*) & \neq & 0 \end{array}\right\} \text{für } p > 1,$$

so hat das Iterationsverfahren $x_{i+1} = \varphi(x_i)$ die Konvergenzordnung p.

b) Folgende Iterationsmethode konvergiert gegen $\sqrt{N}$:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 3Nx_n}{3x_n^2 + N}.$$

Zeigen Sie, daß die Konvergenz von der Ordnung $p = 3$ ist.

3. Aufgabe (3 Punkte (0.5+0.5+2)

Es sei

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ x^2 - y^2 + 1/2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie graphisch alle Nullstellen von f.

b) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f durch Reduktion auf eine Gleichung mit einer Unbekannten.

c) Zeigen Sie, daß das *Newton–Verfahren* auf die Vorschrift

$$\begin{aligned} x_{j+1} &= x_j - \frac{f_1(x_j, y_j) + f_2(x_j, y_j)}{4x_j} \\ y_{j+1} &= y_j - \frac{f_1(x_j, y_j) - f_2(x_j, y_j)}{4y_j} \end{aligned}$$

führt.

4. Aufgabe (2 Punkte)

Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} u''(x) &= -\frac{1}{2}\lambda e^{u(x)}, \quad x \in (0,1) \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

mit $\lambda \geq 0$. Eine Diskretisierung führt auf folgendes nichtlineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} &= -\frac{1}{2}\lambda e^{u_i}, \\ u_0 = u_{N+1} &= 0 \end{aligned}$$

mit $h = \frac{1}{N+1}, N \in \mathbb{N}, x_i = ih, u_i = u(x_i), i = 0, \ldots, N+1$. Schreiben Sie das Gleichungssystem als Nullstellenproblem

$$F(u) = 0$$

und geben Sie die Jacobimatrix $F'(u)$ an.

5. Aufgabe (Praktische Aufgabe) (5 Punkte)

Lösen Sie das nichtlineare System aus Aufgabe 4 mit dem *Newton–Verfahren* für $N = 10$ und einen beliebigen Wert von $\lambda \geq 0$. Dabei soll es möglich sein, wahlweise

a) in jedem Iterationsschritt die Jacobimatrix neu zu berechnen,

b) jeweils nach einer frei wählbaren Anzahl von Iterationsschritten dies zu tun,

c) immer mit der Jacobimatrix des Startwertes zu iterieren,

d) statt der Jacobimatrix die Einheitsmatrix zu benutzen.

Für jeden Wert von λ gibt es zwei Lösungen. Versuchen Sie diese durch die Wahl verschiedener Startwerte zu finden und geben Sie die Anzahl der Iterationsschritte sowie den Lösungsvektor (möglichst graphisch als Paare (x_i, u_i)) aus. Interessant ist auch das Lösungsverhalten für eine steigende Folge (λ_n).

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 10.4. vor der Vorlesung.
Abgabe der Lösungen zu der praktischen Aufgabe am Mo, 23.4. in den Sprechstunden.