Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

Sommersemester 2001

10. Übungsblatt zur Vorlesung "Höhere Numerik"

(Randwertprobleme: Grundlagen, Differenzenverfahren)

1. Aufgabe (3 Punkte)

Welche Lösungen besitzt das Randwertproblem

$$y'' + y = r(x), \quad x \in [a,b], \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

für folgende Daten?

a) $[a,b] = [0,\pi], \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad r(x) \equiv 0$

b) $[a,b] = [0,\pi/2], \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad r(x) \equiv 0$

c) $[a,b] = [0,\pi], \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad r(x) \equiv 0$

d) $[a,b] = [0,\pi/2], \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad r(x) \equiv 0$

e) $[a,b] = [0,\pi/2], \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad r(x) = x^2$

f) $[a,b] = [0,\pi], \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad r(x) = x^2$

2. Aufgabe (1.5 Punkte)

Transformieren Sie das Randwertproblem

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x, u, u')$$

$$u(a) = \alpha\,,\ u(b) = \beta$$

in eines mit homogenen Randbedingungen.

3. Aufgabe (3 Punkte)

Das Randwertproblem

$$-y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad a < x < b$$

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta$$

mit $p, q, r \in C([a,b])$, $0 < q \leq q(x) \quad \forall x \in [a,b]$, soll mit einem Differenzenverfahren gelöst werden. Bestimmen Sie das Gleichungssystem, das man für die Näherungswerte an den äquidistanten Stellen $x_j = a + jh$ erhält, wenn man die auftretenden Ableitungen mit zentralen Differenzenquotienten diskretisiert. Bestimmen Sie eine möglichst große Schranke M, so daß das Gleichungssystem für alle h mit $0 < h \leq M$ eindeutig lösbar ist. Hinweis: Untersuchen Sie die Matrix auf strikte Diagonaldominanz.

4. Aufgabe (2.5 Punkte)

Sei $\Omega =]0,1[^2$ das Einheitsquadrat und $\Gamma = \partial\Omega$ der Rand von Ω. Stellen Sie das lineare Gleichungssystem auf, das durch Diskretisierung der *Poisson–Gleichung*

$$\begin{aligned} -\triangle\, u(x,y) &= f(x,y) \quad && \text{für } (x,y) \in \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \Gamma \end{aligned} \qquad (*)$$

entsteht (dabei ist $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ der Laplace–Operator). Überdecken Sie dazu Ω mit einem Gitter

$$\Omega_h := \{(x,y) = (ih, jh) \,|\, 1 \leq i,j \leq N-1\}$$

mit $h = 1/N$, $N \in \mathbb{N}$, und diskretisieren Sie zweite Ableitungen mit dem zentralen Differenzenquotienten.
Wie sieht das Gleichungssystem aus, wenn auf Γ die Randbedingung $u(x,y) = \varphi(x,y)$ vorgeschrieben wird?

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 12.6. vor der Vorlesung.