Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

Sommersemester 2001

11. Übungsblatt zur Vorlesung "Höhere Numerik"

(Randwertprobleme II)

1. Aufgabe (3 Punkte)

Zeigen Sie, daß das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\big(k(x)u'\big)' + q(x)u &= f(x), \quad 0 < x < \ell \\ -k(0)u'(0) + \beta u(0) &= \mu_1 \\ u(\ell) &= \mu_2 \end{aligned}$$

maximal eine Lösung besitzt. Hierbei seien $k(x) \geq k^* > 0$, $q(x) \geq 0$ und $f(x)$ genügend glatt und die Konstanten $\beta \geq 0$, μ_1,$\mu_2 \in \mathbb{R}$ gegeben.

2. Aufgabe (4 Punkte (2+2))

Gegeben sei das Randwertproblem

$$y'' = f(x), \quad y(0) = y(1) = 0$$

mit $f \in C[0,1]$.

a) Zeigen Sie, daß sich die Lösung des Problems aus

$$y(x) = \int_0^1 g(x,\xi) f(\xi)\, d\xi$$

mit

$$g(x,\xi) = \begin{cases} \xi\,(x-1) & : \ 0 \leq \xi \leq x \leq 1 \\ x\,(\xi - 1) & : \ 0 \leq x \leq \xi \leq 1 \end{cases}$$

ergibt.

b) Zeigen Sie, daß für die Lösung des *gestörten Randwertproblems*

$$u'' = f(x) + \Delta f(x), \quad u(0) = u(1) = 0$$

mit

$$|\Delta f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{für} \quad x \in [0,1]$$

der folgende Zusammenhang gilt:

$$|u(x) - y(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} x(1-x).$$

3. Aufgabe (3 Punkte)

Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad a < x < b$$
$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$$

Sei $y(\cdot, s)$ die Lösung der Differentialgleichung zu den Anfangswerten

$$y(a, s) = \alpha, \quad y'(\cdot, s)(a) = s$$

und

$$F(s) := y(b, s) - \beta.$$

Zeigen Sie: Ist das Randwertproblem eindeutig lösbar, so liefert das *Sekantenverfahren*

$$s_{j+1} = s_j - F(s_j)\frac{s_j - s_{j-1}}{F(s_j) - F(s_{j-1})}$$

für beliebige Startvorgaben s_0, s_1, mit $s_0 \neq s_1$, bereits nach dem ersten Schritt die gesuchte Nullstelle von F.

4. Aufgabe (Praktische Aufgabe) (5 Punkte)

Lösen Sie das nichtlineare Randwertproblem

$$y'' = \frac{3}{2}y, \quad 0 < x < 1$$
$$y(0) = 4 \quad y(1) = 1.$$

mit dem *einfachen Schießverfahren*. Verwenden Sie zur Integration der auftretenden Anfangswertaufgaben einen Integrator ihrer Wahl (z.B. aus früherer Programmieraufgabe). Lösen Sie die nichtlinearen Gleichungssysteme mit dem Newton–Verfahren für verschiedene Startwerte $-40 \leq s^{(0)} \leq 0$. Benutzen die Schrittweiten $h = 10^{-j}, j = 2, 3$ und geben Sie jeweils die Näherungswerte und den absoluten Fehler an den Gitterpunkten aus.

Hinweis: Die beiden exakten Lösungen des Problems sind

$$y(x) = \frac{4}{(1+x)^2}$$
$$y(x) = C_1^2 \left(\frac{1 - \mathrm{cn}(C_1 x - C_2, k)}{1 + \mathrm{cn}(C_1 x - C_2, k)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

wobei $\mathrm{cn}(\xi, k)$ die *Jacobische elliptische Funktion* zum Modul $k = \sqrt{2 + \sqrt{3}}/2$ bezeichnet und die Integrationskonstanten die Werte

$$C_1 = 4.30310990.... \qquad C_2 = 2.33464196...$$

haben. Die Scilab–Funktion für die exakten Lösungen kann von der Webpage

`http://www.num.uni-sb.DE/~ehrhardt/Ue_HoeNum/`

heruntergeladen werden.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 19.6. vor der Vorlesung.
Abgabe der Lösungen zu der praktischen Aufgabe am Mo, 2.7. in den Sprechstunden.