

12. Übungsblatt zur Vorlesung “Höhere Numerik”
(Schießverfahren)

1. Aufgabe (2.5 Punkte (1.5+1))

Die Randwertaufgabe

$$y'' - y' - 110y = 0, \quad 0 < x < 10 \quad (*)$$

$$y(0) = 1, \quad y(10) = 1 \quad (**)$$

soll mit einem *Schießverfahren* gelöst werden.

- Berechnen Sie die exakte Lösung von (*) zu den Anfangswerten $y(0) = s_1$, $y'(0) = s_2$ und hiermit eine Lösung des Randwertproblems. Geben Sie $s^* := y'(0)$ zu den Randwerten (**) an.
- Welchen Wert $\tilde{y}(10)$ erhält man aus den Anfangswerten $\tilde{y}(0) = 1$, $\tilde{y}'(0) = 10^{-9} - 10$? Interpretieren Sie das Ergebnis.

2. Aufgabe (5 Punkte (1+1+1.5+1.5))

Betrachten Sie das Randwertproblem

$$y'' - (y')^2 = 0, \quad -1 < x < 1$$

mit $y(-1) = 0$ und $y(1) = \ln 10$.

- Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y'' - (y')^2 = 0$, $y(-1, s) = 0$, $y'(-1, s) = s$ an, und berechnen Sie \hat{s} so, daß $y(x, \hat{s})$ das Randwertproblem löst.
- In welchem Bereich liegen die s , die zu einem Pol zwischen -1 und 1 führen?
- Schreiben Sie die Newtoniteration zur Berechnung einer Nullstelle der Funktion $y(1, s) - \ln 10$ in der Form $s_{k+1} = T(s_k)$. Skizzieren Sie $s \mapsto T(s)$ sowie $s \mapsto s$ und berechnen Sie dann den Bereich der Startschätzungen, für die diese Fixpunktiteration konvergiert. Wo ist T kontraktiv? In welchem Bereich muß also die Startschätzung s_0 liegen, damit das einfache Schießverfahren konvergiert?
- Führen Sie die gleichen Überlegungen für das *Rückwärtsschießen* durch: Beginnen Sie mit den Startwerten am rechten Rand $y(1, t) = \ln 10$ und $y'(1, t) = t$ und suchen Sie die Nullstelle \hat{t} der Funktion $y(-1, t)$.

3. Aufgabe (2.5 Punkte (1+0.5+1))

Gegeben sei das lineare Randwertproblem 2. Ordnung

$$\begin{aligned}y'' - 100y &= 0, & 0 < x < 3 \\y(0) &= 1, & y(3) = e^{-30}.\end{aligned}$$

- a) Lösen Sie das Randwertproblem analytisch.
- b) Welche Lösung $y(x, s)$ erfüllt die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ und $y'(0) = s$?
- c) Wie verhält sich $|y(3, s + \Delta s) - y(3, s)|$ im Vergleich zu Δs ? Welche Schwierigkeiten ergeben sich hieraus für die numerische Realisierung des Schießverfahrens?

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 26.6. vor der Vorlesung.