

**13. Übungsblatt zur Vorlesung “Höhere Numerik”**  
(Variationsformulierung)

**1. Aufgabe** (3 Punkte (1+2))

Gegeben sei die lineare Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}y'' - (1 + x^2)y &= 0, & -1 < x < 1 \\ y(-1) &= y(1) = 1.\end{aligned}$$

- Transformieren Sie das Problem auf eines mit homogenen Randdaten.
- Wie lautet das zugehörige Variationsproblem (nach der Transformation)?

**2. Aufgabe** (4 Punkte (2+2))

Betrachtet wird das Randwertproblem

$$\begin{aligned}-y''(x) &= f(x), & 0 < x < 1 \\ y(0) &= 0, & y'(1) = 0\end{aligned}$$

- Leiten Sie eine *Variationsformulierung*

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V$$

des obigen Randwertproblems her.

Hinweis: Der Raum  $V$  der Testfunktionen muß die Lösungen der beiden Probleme beinhalten, um Fehlerabschätzungen herleiten zu können.

- Zeigen Sie, daß unter der Voraussetzung  $f \in C([0, 1])$  jede Lösung  $u \in C^2([0, 1])$  des Variationsproblems, die den Randbedingungen genügt, auch die ursprüngliche Randwertaufgabe löst.

**3. Aufgabe** (3 Punkte)

Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$-(a(x)u')' = 0, \quad u(-1) = 3, \quad u(1) = 0$$

mit

$$a(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ 0.5 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Geben Sie eine *schwache Formulierung* dieser Aufgabe an und bestimmen Sie deren Lösung.

Hinweis: Betrachten Sie zur Lösung des Variationsproblems geeignete, stückweise lineare Testfunktionen.

**Abgabe** der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 3.7. im Sekretariat (bis 12 Uhr).

Fortsetzung der Vorlesung “Höhere Numerik” im WS 01/02:

## “Numerik partieller Differentialgleichungen”

(4h VL + 2h UE)

### **Themen:**

1. Finite Differenzenverfahren für parabolische und elliptische Differentialgleichungen
2. Einführung in die Theorie der Sobolev-Räume
3. Variationsformulierung von Randwertproblemen
4. Die Finite-Elemente-Methode
5. Einführung in Mehrgitterverfahren