

### 3. Übungsblatt zur Vorlesung “Höhere Numerik” (Euler–Verfahren)

#### 1. Aufgabe (2 Punkte)

Vorgelegt sei das Anfangswertproblem

$$y'(x) = x^2 + y(x), \quad x \geq 0 \\ y(0) = 1.$$

Verifizieren Sie, daß es von  $y(x) := 3e^x - x^2 - 2x - 2$ ,  $x \geq 0$  gelöst wird und bestimmen Sie vermöge des *Eulerschen Polygonzugverfahrens* mit Schrittweite 0.2 einen Näherungswert  $E(1)$  für  $y(1)$ . Was ist der prozentuale Fehler?

#### 2. Aufgabe (2 Punkte)

Bestimmen Sie unter Verwendung des *Eulerschen Polygonzugverfahrens* die exakte Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) + y(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = y'(0) = 1.$$

Hinweis: Überführen Sie das Problem zunächst in ein System 1. Ordnung.

#### 3. Aufgabe (3 Punkte (1.5+1.5))

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$y'(x) = -2ax, \quad y(0) = y_0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie den *globalen Diskretisierungsfehler* für das modifizierte Euler–Verfahren und das implizite Euler–Verfahren  $y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1})$ .

#### 4. Aufgabe (3 Punkte)

Das explizite Einschrittverfahren  $y_{k+1} = y_k + hF(x_k, y_k, h)$  mit der *Verfahrensfunktion*  $F(x, y, h)$  habe die Ordnung  $m \geq 1$ . Zeigen Sie, daß das daraus abgeleitete Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F(x_k, y_k, h)\right)$$

mindestens die Ordnung 2 besitzt.

**5. Aufgabe** (Praktische Aufgabe) (5 Punkte)

Implementieren Sie das Eulersche Polygonzugverfahren, das modifizierte Euler–Verfahren und das *Verfahren von Heun*:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \left( f(x_k, y_k) + f(x_k + h, y_k + hf(x_k, y_k)) \right).$$

Testen Sie diese Routinen an dem Anfangswertproblem

$$y' = 1 + (y - x)^2, \quad y(0) = 0.5$$

mit den Schrittweiten  $h = 10^{-j}$  ( $j = 1, \dots, 4$ ). Geben Sie jeweils die Näherungswerte der drei Verfahren und die exakte Lösung ( $y(x) = x + \frac{1}{2-x}$ ) an den Stellen  $\frac{j}{10}$  ( $j = 1, \dots, 19$ ) nebeneinander in einer Tabelle aus.

**Abgabe** der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 24.4. vor der Vorlesung.  
**Abgabe** der Lösungen zu der praktischen Aufgabe am Mo, 7.5. in den Sprechstunden.