Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt Sommersemester 2001

9. Übungsblatt zur Vorlesung "Höhere Numerik"

(Integration steifer Differentialgleichungen II)

1. Aufgabe (2 Punkte)

Verifizieren Sie, daß die Stabilitätsfunktion des klassischen Runge–Kutta–Verfahrens 4. Ordnung durch das Polynom

$$g(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4$$

gegeben ist.

2. Aufgabe (5 Punkte (2+2+1)

Gegeben sei die lineare homogene DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y' = Ay \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -500.5 & 499.5 \\ 499.5 & -500.5 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der DGL $y' = Ay$. Berechnen Sie dazu die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A und entkoppeln Sie das System.

b) Bestimmen Sie das Gebiet der absoluten Stabilität des Euler–Verfahrens. D.h. wie klein muß die Schrittweite h mindestens gewählt werden, damit

$$\rho(I + hA) < 1$$

gilt. (Woher kommt dieses Kriterium?)

c) Rechnen Sie einen Schritt des Euler–Verfahrens für das AWP $y' = Ay$, $y(0) = (2, 0)^\top$ mit der Schrittweite $h = 0.002$. Vergleichen Sie die Näherung mit der exakten Lösung.

3. Aufgabe (3 Punkte (1.5+1.5))

Man zeige, daß die *explizite Mittelpunktregel*

$$\eta_{i+1} = \eta_{i-1} + 2hf(t_i, \eta_i)$$

und das *Milne–Simpson–Verfahren*

$$\eta_{i+1} = \eta_{i-1} + \frac{h}{3}\big(f(t_{i-1}, \eta_{i-1}) + 4f(t_i, \eta_i) + f(t_{i+1}, \eta_{i+1})\big)$$

kein reelles Intervall der absoluten Stabilität besitzen.

4. Aufgabe (Praktische Aufgabe) (5 Punkte (1+4))

Gegeben sei die Aufgabe

$$\begin{aligned} v'' + 40y - 2 + x^2 &= 0 \\ (2 - x^2)y'' - v &= 0 \end{aligned}$$

mit den Randbedingungen

$$v(1) = v'(1) = y'(0) = v'(0) = 0$$

Lösen Sie dieses Randwertproblem mit einem geeigneten Differenzenverfahren, und zwar

a) per Hand/Taschenrechner für die Schrittweite $h = 0.5$,

b) per Programm für die Schrittweiten $h = 0.2$, $h = 0.1$, $h = 0.02$.

Geben Sie jeweils tabellarisch die Näherungswerte aus.
Bemerkung: Dieses Randwertproblem kommt von der Biegung eines elastisch gebetteten Stabes; die numerische Lösung eines ähnlichen Problems kann man auf der Webpage

`http://numawww.mathematik.tu-darmstadt.de:8081/numerik/gdgl/balkentext.html`

ausprobieren.
Zum Vergleichen und Experimentieren kann die Scilab–Routine `bvode` benutzt werden.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 5.6. vor der Vorlesung.
Abgabe der Lösungen zu der praktischen Aufgabe am Mo, 18.6. in den Sprechstunden.