Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

Sommersemester 2001

12. Übungsblatt zur Vorlesung "Höhere Numerik"

(Schießverfahren)

1. Aufgabe (2.5 Punkte (1.5+1))

Die Randwertaufgabe

$$y'' - y' - 110y = 0, \quad 0 < x < 10 \tag{$*$}$$

$$y(0) = 1, \quad y(10) = 1 \tag{$**$}$$

soll mit einem *Schießverfahren* gelöst werden.

a) Berechnen Sie die exakte Lösung von $(*)$ zu den Anfangswerten $y(0) = s_1$, $y'(0) = s_2$ und hiermit eine Lösung des Randwertproblems. Geben Sie $s^* := y'(0)$ zu den Randwerten $(**)$ an.

b) Welchen Wert $\tilde{y}(10)$ erhält man aus den Anfangswerten $\tilde{y}(0) = 1$, $\tilde{y}'(0) = 10^{-9} - 10$? Interpretieren Sie das Ergebnis.

2. Aufgabe (5 Punkte (1+1+1.5+1.5))

Betrachten Sie das Randwertproblem

$$y'' - (y')^2 = 0, \quad -1 < x < 1$$

mit $y(-1) = 0$ und $y(1) = \ln 10$.

a) Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y'' - (y')^2 = 0$, $y(-1, s) = 0$, $y'(-1, s) = s$ an, und berechnen Sie $\hat{s}$ so, daß $y(x, \hat{s})$ das Randwertproblem löst.

b) In welchem Bereich liegen die s, die zu einem Pol zwischen -1 und 1 führen?

c) Schreiben Sie die Newtoniteration zur Berechnung einer Nullstelle der Funktion $y(1, s) - \ln 10$ in der Form $s_{k+1} = T(s_k)$. Skizzieren Sie $s \mapsto T(s)$ sowie $s \mapsto s$ und berechnen Sie dann den Bereich der Startschätzungen, für die diese Fixpunktiteration konvergiert. Wo ist T kontraktiv? In welchem Bereich muß also die Startschätzung s_0 liegen, damit das einfache Schießverfahren konvergiert?

d) Führen Sie die gleichen Überlegungen für das *Rückwärtsschießen* durch: Beginnen Sie mit den Startwerten am rechten Rand $y(1, t) = \ln 10$ und $y'(1, t) = t$ und suchen Sie die Nullstelle $\hat{t}$ der Funktion $y(-1, t)$.

3. Aufgabe (2.5 Punkte (1+0.5+1)

Gegeben sei das lineare Randwertproblem 2. Ordnung

$$
\begin{gathered}
y'' - 100y = 0, \quad 0 < x < 3 \\
y(0) = 1, \quad y(3) = e^{-30}.
\end{gathered}
$$

a) Lösen Sie das Randwertproblem analytisch.

b) Welche Lösung $y(x,s)$ erfüllt die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ und $y'(0) = s$?

c) Wie verhält sich $|y(3, s + \Delta s) - y(3, s)|$ im Vergleich zu Δs? Welche Schwierigkeiten ergeben sich hieraus für die numerische Realisierung des Schießverfahrens?

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 26.6. vor der Vorlesung.