Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

Sommersemester 2001

13. Übungsblatt zur Vorlesung "Höhere Numerik"

(Variationsformulierung)

1. Aufgabe (3 Punkte (1+2))

Gegeben sei die lineare Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} y'' - (1+x^2)y &= 0, \qquad -1 < x < 1 \\ y(-1) = y(1) &= 1. \end{aligned}$$

a) Transformieren Sie das Problem auf eines mit homogenen Randdaten.

b) Wie lautet das zugehörige Variationsproblem (nach der Transformation)?

2. Aufgabe (4 Punkte (2+2))

Betrachtet wird das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -y''(x) &= f(x), \qquad 0 < x < 1 \\ y(0) = 0, &\quad y'(1) = 0 \end{aligned}$$

a) Leiten Sie eine *Variationsformulierung*

$$a(u,v) = (f,v) \qquad \forall v \in V$$

des obigen Randwertproblems her.
Hinweis: Der Raum V der Testfunktionen muß die Lösungen der beiden Probleme beinhalten, um Fehlerabschätzungen herleiten zu können.

b) Zeigen Sie, daß unter der Voraussetzung $f \in C([0,1])$ jede Lösung $u \in C^2([0,1])$ des Variationsproblems, die den Randbedingungen genügt, auch die ursprüngliche Randwertaufgabe löst.

3. Aufgabe (3 Punkte)

Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$-(a(x)u')' = 0, \qquad u(-1) = 3, \quad u(1) = 0$$

mit

$$a(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -1 \le x < 0 \\ 0.5 & \text{für } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Geben Sie eine *schwache Formulierung* dieser Aufgabe an und bestimmen Sie deren Lösung.
Hinweis: Betrachten Sie zur Lösung des Variationsproblems geeignete, stückweise lineare Testfunktionen.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 3.7. im Sekretariat (bis 12 Uhr).

Fortsetzung der Vorlesung "Höhere Numerik" im WS 01/02:

"Numerik partieller Differentialgleichungen"

(4h VL + 2h UE)

Themen:

1. Finite Differenzenverfahren für parabolische und elliptische Differentialgleichungen
2. Einführung in die Theorie der Sobolev–Räume
3. Variationsformulierung von Randwertproblemen
4. Die Finite–Elemente–Methode
5. Einführung in Mehrgitterverfahren