Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

Sommersemester 2001

3. Übungsblatt zur Vorlesung "Höhere Numerik"

(Euler–Verfahren)

1. Aufgabe (2 Punkte)

Vorgelegt sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= x^2 + y(x), \quad x \geq 0 \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

Verifizieren Sie, daß es von $y(x) := 3e^x - x^2 - 2x - 2$, $x \geq 0$ gelöst wird und bestimmen Sie vermöge des *Eulerschen Polygonzugverfahrens* mit Schrittweite 0.2 einen Näherungswert E(1) für y(1). Was ist der prozentuale Fehler?

2. Aufgabe (2 Punkte)

Bestimmen Sie unter Verwendung des *Eulerschen Polygonzugverfahrens* die exakte Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y''(x) + y(x) &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = y'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Hinweis: Überführen Sie das Problem zunächst in ein System 1. Ordnung.

3. Aufgabe (3 Punkte (1.5+1.5))

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$y'(x) = -2ax, \qquad y(0) = y_0, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie den *globalen Diskretisierungsfehler* für das modifizierte Euler–Verfahren und das implizite Euler–Verfahren $y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1})$.

4. Aufgabe (3 Punkte)

Das explizite Einschrittverfahren $y_{k+1} = y_k + h\,F(x_k, y_k, h)$ mit der *Verfahrensfunktion* $F(x, y, h)$ habe die Ordnung $m \geq 1$. Zeigen Sie, daß das daraus abgeleitete Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + hf\big(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}\,F(x_k, y_k, h)\big)$$

mindestens die Ordnung 2 besitzt.

5. Aufgabe (Praktische Aufgabe) (5 Punkte)

Implementieren Sie das Eulersche Polygonzugverfahren, das modifizierte Euler–Verfahren und das *Verfahren von Heun*:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\Big(f(x_k, y_k) + f\big(x_k + h, y_k + hf(x_k, y_k)\big)\Big).$$

Testen Sie diese Routinen an dem Anfangswertproblem

$$y' = 1 + (y - x)^2, \quad y(0) = 0.5$$

mit den Schrittweiten $h = 10^{-j} (j = 1, \ldots, 4)$. Geben Sie jeweils die Näherungswerte der drei Verfahren und die exakte Lösung $(y(x) = x + \frac{1}{2-x})$ an den Stellen $\frac{j}{10} (j = 1, \ldots, 19)$ nebeneinander in einer Tabelle aus.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 24.4. vor der Vorlesung.
Abgabe der Lösungen zu der praktischen Aufgabe am Mo, 7.5. in den Sprechstunden.