Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

Sommersemester 2001

4. Übungsblatt zur Vorlesung "Höhere Numerik"

(Runge–Kutta–Methoden I)

1. Aufgabe (2 Punkte)

Berechnen Sie mit dem *klassischen Runge–Kutta–Verfahren 4. Ordnung* vierstellige Näherungswerte y_1, y_2 für die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' &= y^2 - x^2, \quad x \geq 0 \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

an den Stellen $x_1 = 0.1$ und $x_2 = 0.2$.

2. Aufgabe (2 Punkte)

Bestimmen Sie alle *Runge–Kutta–Verfahren* der Gestalt

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & a_{21} & & \\ 2/3 & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array},$$

die die Ordnung 3 haben.

3. Aufgabe (3 Punkte)

Wie lauten die Bedingungen für die vier Parameter a_{21}, b_1, b_2 und c_2 des *2–stufigen Runge–Kutta–Verfahrens*

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_m, y_m) \\ k_2 &= f(x_m + c_2 h_m, y_m + h_m a_{21} k_1) \\ y_{m+1} &= y_m + h_m(b_1 k_1 + b_2 k_2), \end{aligned}$$

damit es maximale Ordnung besitzt? Als Spezialfälle sind sowohl die *Methode von Heun* als auch das *modifizierte Euler–Verfahren* abzuleiten.
Man erkläre, daß die Ordnung höchstens 2 ist (vgl. Lemma 1 aus Kapitel 3.2).
Leiten Sie das *"optimale Verfahren"* her, indem Sie die Summe der Koeffizientenbeträge im führenden Term der Fehlerentwicklung minimieren.

4. Aufgabe (3 Punkte)

Auf das Anfangswertproblem

$$y'(x) = Ly(x), \qquad y(0) = y_0, \qquad L \in \mathbb{R},$$

werde ein beliebiges, *s–stufiges Runge–Kutta–Verfahren* mit der Approximationsordnung $p = s$ angewendet. Zeigen Sie, daß bei Verwendung eines äquidistanten Gitters der Schrittweite $h > 0$ die Beziehung

$$y_1 = y_0 \sum_{j=0}^{s} \frac{(Lh)^j}{j!}$$

gilt.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Do, 3.5. vor der Vorlesung.