Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

Sommersemester 2001

5. Übungsblatt zur Vorlesung "Höhere Numerik"

(Runge–Kutta–Methoden II)

1. Aufgabe (2 Punkte)

Man zeige mit Hilfe von Taylorentwicklungen, daß das durch die Verfahrensfunktion

$$\begin{aligned} F(x_m, y_m, h_m) &= \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3), \\ k_1 &= f(x_m, y_m), \\ k_2 &= f\Big(x_m + \frac{h_m}{2}, y_m + \frac{h_m}{2}k_1\Big), \\ k_3 &= f\big(x_m + h_m, y_m + h_m(-k_1 + 2k_2)\big) \end{aligned}$$

gegebene Einschrittverfahren (*einfache Kutta–Regel*) von 3. Ordnung ist.

2. Aufgabe (2 Punkte)

Wir betrachten ein *explizites, s–stufiges Runge–Kutta–Verfahren* zur Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$:

$$k_i(x, y) = f\Big(x + c_i h_m, y + h_m \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j(x, y)\Big) \quad \text{mit} \quad \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = c_i,$$

$$y_{m+1} = y_m + h_m \sum_{i=1}^{s} b_i k_i(x_m, y_m)$$

Zeigen Sie:

a) Gilt $\sum_{i=1}^{s} b_i = 1$, so besitzt das Verfahren die Ordnung 1.

b) Gilt zusätzlich $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} b_i c_i = \frac{1}{2}$, so hat das Verfahren die Ordnung 2.

Bemerkung: Für höhere Ordnungen steigt die Anzahl der zu erfüllenden, nichtlinearen Bedingungsgleichungen rasch an. So sind für 3. Ordnung zusätzlich die Gleichungen

c1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} b_i c_i^2 = \frac{1}{3}$ und c2) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{s} a_{ij} b_i c_j = \frac{1}{6}$

zu erfüllen, für Ordnung 4 kommen weitere 4 Gleichungen hinzu.

3. Aufgabe (1 Punkt)

Konstruieren Sie alle *Runge–Kutta–Verfahren der Ordnung 2* in der Gestalt

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ c_2 & c_2 & & \\ c_3 & 0 & c_3 & \\ \hline & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

4. Aufgabe (Praktische Aufgabe) (5 Punkte)

Implementieren Sie das *klassische Runge–Kutta–Verfahren 4. Ordnung* und das *7–stufige Butcher–Verfahren 6. Ordnung*:

$$\begin{array}{c|ccccccc} 0 & & & & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & & & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & & & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{36} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{12} & & & & \\ \frac{5}{6} & -\frac{35}{144} & -\frac{55}{36} & \frac{35}{48} & \frac{15}{8} & & & \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{360} & -\frac{11}{36} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & & \\ 1 & -\frac{41}{260} & \frac{22}{13} & \frac{43}{156} & -\frac{118}{39} & \frac{32}{195} & \frac{80}{39} & \\ \hline & \frac{13}{200} & 0 & \frac{11}{40} & \frac{11}{40} & \frac{4}{25} & \frac{4}{25} & \frac{13}{200} \end{array}$$

Testen Sie Ihre Programme an dem Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= x^2 + y^2, \quad x \geq 0 \\ y(0) &= y_0. \end{aligned} \tag{1}$$

Geben Sie die berechneten Näherungen y_m und die exakte Lösung an den Stellen $x_m = \frac{m}{20}$, $m = 1, \ldots, 20$ aus.

Hinweise:

a) Die exakte Lösung der *Riccatische Differentialgleichung* (1) ist

$$y(x) = x \, \frac{C J_{-3/4}(\frac{x^2}{2}) + J_{3/4}(\frac{x^2}{2})}{J_{-1/4}(\frac{x^2}{2}) - C J_{1/4}(\frac{x^2}{2})}, \qquad C = \frac{y_0}{2} \frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)},$$

wobei J_ν die Besselfunktionen und Γ die Gammafunktion bezeichnet.

b) Die Scilab–Funktion für die exakte Lösung von (1) kann von der Webpage

`http://www.num.uni-sb.DE/~ehrhardt/Ue_HoeNum/`

heruntergeladen werden.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 8.5. vor der Vorlesung.
Abgabe der Lösungen zu der praktischen Aufgabe am Mo, 21.5. in den Sprechstunden.