Universität des Saarlandes Sommersemester 2001
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

6. Übungsblatt zur Vorlesung "Höhere Numerik"

(Schrittweitensteuerung, eingebettete Runge–Kutta–Verfahren, implizite Runge–Kutta–Methoden)

1. Aufgabe (2 Punkte)

Gegeben sei das 2–stufige Runge–Kutta–Verfahren

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \\ \hline & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array},$$

das Konsistenzordnung 2 besitzt. Bestimmen Sie ein geeignetes Verfahren der Stufe 3, so daß die Kombination beider Vorschriften ein *eingebettetes Runge–Kutta–Verfahren des Typs 2(3)* ergibt.

2. Aufgabe (3 Punkte)

Bestimmen Sie zur *Methode von Heun 2. Ordnung*

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array},$$

die passende einparametrige Familie expliziter Runge–Kutta–Verfahren 3. Ordnung minimaler Stufenzahl (Parameter c_3) und leiten Sie damit einen Schätzwert für den lokalen Diskretisierungsfehler der Methode von Heun 2. Ordnung her. Ersetzen Sie dabei die unbekannten Werte $k_i(x_m, y(x_m))$ durch die bekannten Näherungen $k_i(x_m, y_m)$. Geben Sie auch die Ergebnisse für den Fall $c_3 = 0.5$ an.

3. Aufgabe (3 Punkte)

Zur Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ sei für jedes $p > 0$ ein Einschrittverfahren p–ter Ordnung gegeben, welches für jeden Schritt die Rechenzeit pT_0 benötigt und in $x = X$ den Fehler Kh^p produziert. Die Konstanten K und T_0 sollen vom jeweiligen Verfahren unabhängig sein. Man bestimme für p und einen vorgeschriebenen Fehler $\varepsilon \leq K$ in $x = X$ die größtmöglichste Schrittweite $h = h(p, \varepsilon)$ und die zugehörige Gesamtrechenzeit $T = T(p, \varepsilon)$. Wie verhält sich T in Abhängigkeit von p und welches ist die optimale Konsistenzordnung $p_{opt} = p_{opt}(\varepsilon)$? Wie verhält sich p_{opt} in Abhängigkeit von ε?

<u>4. Aufgabe</u> (2 Punkte)

Es gibt für $s \in \mathbb{N}$ genau ein s–stufiges, implizites Runge–Kutta–Verfahren der Ordnung $2s$.

a) Zeigen Sie dies für den Fall $s = 1$. Um welches Verfahren handelt es sich?

b) Vergleichen sie den Sachverhalt mit dem für explizite Runge–Kutta–Verfahren. Warum sind die impliziten Runge–Kutta–Verfahren dennoch für den *allgemeinen Einsatz* wenig interessant?

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 15.5. vor der Vorlesung.