Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

Sommersemester 2001

7. Übungsblatt zur Vorlesung "Höhere Numerik"

(Mehrschrittverfahren: Konsistenzordnung, Differenzengleichungen, Stabilität)

1. Aufgabe (1 Punkt)

Zeigen Sie mit Hilfe der Fehlerabschätzung für die Newton–Cotes–Formeln, daß das *Milne–Simpson–Verfahren*

$$y_m - y_{m-2} = \frac{h}{3}\big(f_m + 4f_{m-1} + f_{m-2}\big)$$

von 4. Ordnung ist.

2. Aufgabe (2 Punkte)

Bestimmen Sie die Koeffizienten aller impliziten linearen *2–Schrittverfahren*

$$a_0 y_m + a_1 y_{m-1} + a_2 y_{m-2} = h\big(b_0 f_m + b_1 f_{m-1} + b_2 f_{m-2}\big)$$

mit $b_2 = 0$ derart, daß sie maximale Ordnung haben. Untersuchen Sie die Stabilität des resultierendenVerfahrens. Warum ist allgemein 1 immer eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms?

3. Aufgabe (4 Punkte (2+2))

Mehrschrittverfahren vom *Adams–Typ* beruhen darauf, in der Gleichung

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\, dx$$

den Integranden f(x,y(x)) durch ein Interpolationspolynom vom Grad n zu ersetzen und dann exakt zu integrieren.

a) Bei den expliziten *Adams–Bashforth–Verfahren* wird das Polynom bestimmt von den Punkten $(x_{i-n}, f_{i-n}), \ldots, (x_i, f_i)$ mit $f_i = f(x_i, u_i)$. Geben Sie das Polynom explizit an, und bestimmen Sie für $n \in \{0, 1\}$ die Koeffizienten β_j von

$$u_{i+1} = u_i + h \sum_{j=0}^{n} \beta_j f(x_{i-j}, u_{i-j})$$

durch Integration.

b) Bei den impliziten *Adams–Moulton–Verfahren* wird das Polynom bestimmt von den Punkten. $(x_{i+1-n}, f_{i+1-n}), \dots, (x_{i+1}, f_{i+1})$. Geben Sie das Polynom explizit an, und bestimmen Sie für $n \in \{0, 1, 2\}$ die Koeffizienten α_j von

$$u_{i+1} = u_i + h \sum_{j=0}^{n} \alpha_j f(x_{i+1-j}, u_{i+1-j})$$

durch Integration.

c) Welche dieser Verfahren sind Ihnen bereits unter anderem Namen bekannt?

4. Aufgabe (3 Punkte)

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a > 0$ die Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 2a\,y' + a\,y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

Lösen Sie nun analog die Differenzengleichung

$$y_{n+2} - 2a\,y_{n+1} + a\,y_n = 0, \quad y_0 = 0,\ y_1 = 1.$$

Für welche $a > 0$ ist die Differenzengleichung stabil?

5. Aufgabe (Praktische Aufgabe) (5 Punkte)

Implementieren Sie das Prädiktor–Korrektor–Verfahren, das als Prädiktor das *Adams–Bashforth–Verfahren*

$$y_m - y_{m-1} = \frac{h}{12}\big(23 f_{m-1} - 16 f_{m-2} + 5 f_{m-3}\big)$$

und als Korrektor das *Adams–Moulton–Verfahren*

$$y_m - y_{m-1} = \frac{h}{24}\big(9 f_m + 19 f_{m-1} - 5 f_{m-2} + f_{m-3}\big)$$

verwendet. Testen Sie Ihr Programm an dem Anfangswertproblem der praktischen Aufgabe vom 3. Übungsblatt, wobei Sie als Schrittweiten $h = 10^{-j}$ $(j = 1, \dots, 4)$ verwenden und die Anlaufrechnungen einmal mit dem *Euler–Verfahren* und einmal mit dem *klassischen Runge–Kutta–Verfahren 4. Ordnung* durchführen. Geben Sie für jede Schrittweite die berechneten Näherungswerte und die exakte Lösung an den Stellen $j/10$ $(j = 0, \dots, 19)$ nebeneinander in einer Tabelle aus.

Hinweise: Die exakte Lösung der Differentialgleichung ist $y(x) = x + 1/(2 - x)$, $x \geq 0$. Zum Vergleichen und Experimentieren kann das Programm `Adams.sci` von

`http://www.num.uni-sb.DE/~ehrhardt/Ue_HoeNum/`

heruntergeladen werden.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 22.5. vor der Vorlesung.
Abgabe der Lösungen zu der praktischen Aufgabe am Do, 7.6. in den Sprechstunden 9–13 Uhr.