Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

Sommersemester 2001

8. Übungsblatt zur Vorlesung "Höhere Numerik"

(Integration steifer Differentialgleichungen I)

1. Aufgabe (4 Punkte (2+2))

Bei der Lösung von steifen Differentialgleichungen erfordern Lösungsverfahren mit beschränkten Stabilitätsbereichen häufig zu kleine Schrittweiten, um sie effizient anzuwenden. Eine Gruppe von Verfahren, die dann eingesetzt werden können, sind die *BDF-Verfahren* (backward difference formula)

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \, \eta_{n+j} = h f_{n+k},$$

wobei die α_j so gewählt werden, daß eine möglichst hohe Ordnung erreicht wird.

a) Zeigen Sie, daß der Stabilitätsbereich dieser Verfahren unbeschränkt ist.

b) Geben Sie für $k = 1, 2$ die Verfahrensvorschriften an und bestimmen Sie die Stabilitätsbereiche.

2. Aufgabe (2 Punkte)

Man zeige: Die *implizite Mittelpunktregel*

$$\eta_{i+1} = \eta_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, \frac{\eta_i + \eta_{i+1}}{2}\right)$$

ist uneingeschränkt A–stabil: Bei Anwendung auf $y' = \lambda(t)y$ mit Re $\lambda(t) \le 0$ ergibt sich

$$|\eta(t_{i+1}; h)| \le |\eta(t_i; h)|, \qquad i = 0, \ldots, N-1$$

für beliebiges $h > 0$.

3. Aufgabe (4 Punkte (3+1))

Es sei folgendes *2–stufiges Runge–Kutta–Verfahren* gegeben:

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

a) Überprüfen Sie, ob das Verfahren A–stabil ist.

b) Führen Sie mit dem Verfahren einen Integrationsschritt mit $h = 1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ für die Modellgleichung $y' = \lambda y$, $\lambda < 0$ durch.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 29.5. vor der Vorlesung.