Grundlagen der Numerik Physikalischer Erhaltungsgesetze

Vorlesung, Sommersemester 1998

Wolfgang Egartner
(IWR, Universität Heidelberg)

Ziel

Es wird in diejenigen mathematischen (Unstetigkeiten, Mehrdeutigkeit der Lösung) und numerischen (Diffusion, Dispersion, Konvergenz gegen Nicht-Lösungen, Stabilität) Probleme eingeführt, die für eindimensionale, nicht-diffusive Erhaltungsgesetze spezifisch sind.

Aufbauend darauf werden einige numerische Lösungsverfahren vorgestellt und deren Eigenschaften unter verschiedenen Aspekten diskutiert.

Voraussetzung sind grundlegende Kenntnisse der reellen Analysis und der Linearen Algebra.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **3**
1.1 Gleichungen . . . 3
1.2 Beispiele für Erhaltungsgesetze . . . 4
1.3 Klassische Lösung . . . 5
1.4 Schwache Lösung . . . 6
1.5 Sprungbedingung . . . 7
1.6 Entropiebedingung . . . 7

2 Eindimensionale, skalare Gleichungen **9**
2.1 Cauchy-Problem . . . 9
2.2 Riemann-Problem . . . 12

3 Eindimensionale Systeme **15**
3.1 Lineare Systeme . . . 15
3.2 Linearisierung nichtlinearer Systeme . . . 16
3.3 Das Riemann-Problem . . . 16

4 Mehrdimensionale, lineare Gleichungen **17**

5 Numerik linearer Gleichungen **19**
5.1 Grundbegriffe . . . 19
5.2 Stabilität und CFL-Bedingung . . . 22
5.3 Numerische Diffusion und Dispersion . . . 24

6 Konservative Verfahren **28**
6.1 Der Satz von Lax-Wendroff . . . 28
6.2 Das klassische Godunov-Verfahren . . . 32
6.3 Approximative Riemannlöser . . . 34
6.4 Schemen erster und zweiter Ordnung . . . 35
6.5 Hybride Schemen . . . 37

7 Konvergenz skalarer Verfahren **38**
7.1 TV-Stabilität . . . 38
7.2 Stabilitätskriterien . . . 40

Schlussbemerkungen **41**

Literatur **42**

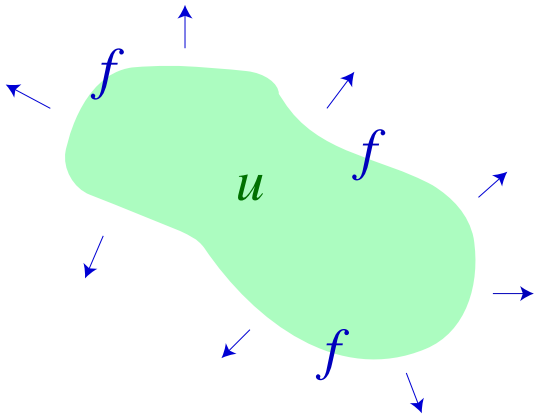

Abbildung 1: Dichte und Fluss

1 Einführung

1.1 Gleichungen

Wie in Abbildung 1 dargestellt, beschreiben Erhaltungsgesetze das Zusammenspiel einer *Dichtefunktion*

$$\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^m$$

mit ihrer *Flussfunktion*

$$\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n),$$
$$\mathbf{f}_i : U \to \mathbb{R}^m,\ U \subseteq \mathbb{R}^m,\ U \text{ offen.}$$

Sie besagen, dass die zeitliche Änderung des Integrals der Dichtefunktion über einem bestimmten Gebiet gleichzusetzen ist mit dem Fluss über den Rand:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \mathbf{u}\, dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \mathbf{0} \quad \forall\, t > 0, \forall\, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n\,. \tag{1.1}$$

Zusätzlich zu einem Gesetz für ihre zeitliche Änderung benötigt man natürlich noch den Anfangszustand der Dichtefunktion:

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\boldsymbol{x}) \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\,. \tag{1.2}$$

Bemerkung 1.1. Man kann das Definitionsgebiet der Lösung $\mathbf{u}$ auch beschränken und Randwerte vorgeben. Die korrekte Formulierung von Randwertproblemen ist aber ein eigenes, sehr komplexes Themengebiet, das den Rahmen dieser Vorlesung eindeutig sprengen würde.

Wenn die Flussfunktion die Form $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x)$ hat, spricht man von *advektiv-diffusivem* Fluss. In dieser Vorlesung werden Erhaltungsgesetze behandelt, in denen diffusive Phänomene keine Rolle spielen, wo also $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$.

Ferner werden ausschließlich Gleichungen vom *hyperbolischen Typ* behandelt, d. h. alle Matrizen $\mathbf{F}_\omega(\mathbf{u}) := \sum_{i=1}^n \omega_i \nabla_u \mathbf{f}_i(\mathbf{u})$ besitzen einen vollständigen Satz von Eigenvektoren und nur reelle Eigenwerte. Wenn die zugehörigen Eigenwerte alle verschieden sind, heißt die Gleichung *strikt hyperbolisch*.

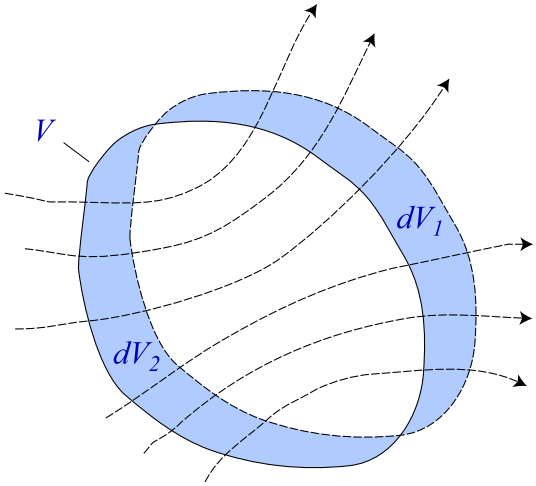

Abbildung 2: Massenerhaltung

Man beachte, dass die Gleichung insbesondere dann hyperbolisch ist, wenn

$$\mathbf{F}_\omega(\mathbf{u})\,\mathbf{F}_\omega(\mathbf{u})^\top \;=\; \mathbf{F}_\omega(\mathbf{u})^\top\mathbf{F}_\omega(\mathbf{u})\,. \tag{1.3}$$

Genau dann gibt es sogar einen *orthogonalen* Satz an Eigenvektoren.

Einen wichtigen Spezialfall bilden vor allem *symmetrisierbare* Gleichungen, für die es eine in $\mathbf{u}$ stetige, positiv definite Matrixfunktion $\mathbf{G}(\mathbf{u})$ gibt mit der Eigenschaft, dass $\mathbf{G}(\mathbf{u})\,\mathbf{F}_\omega(\mathbf{u})$ für alle ω symmetrisch ist. Die meisten in der praktischen Anwendung benötigten Gleichungen sind symmetrisierbar.

1.2 Beispiele für Erhaltungsgesetze

Beispiel 1.1 (Eulergleichungen). Das wohl prominenteste nicht-diffusive Erhaltungsgesetz der Form (1.1) ist die Eulergleichung der Gasdynamik.

Wir leiten eine Komponente dieser Gleichungen her, indem wir eine festgelegte Masse in einem Zeitintervall Δt beobachten (siehe Abbildung 2):

Die Masse befindet sich zum Zeitpunkt t innerhalb der durchgezogenen Linie (also in Gebiet V) und verlagert sich innerhalb der Zeitspanne Δt auf das von der strichlierten Linie markierte Gebiet $(V + dV_1 - dV_2)$:

$$m_V(t) \;=\; m_V(t+\Delta t) + m_{dV_1}(t+\Delta t) - m_{dV_2}(t+\Delta t)\,. \tag{1.4}$$

Man dividiert nun durch Δt, bildet den Grenzübergang $\Delta t \to 0$ und erhält

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \rho\,dV + \int_{\partial\Omega} \rho\,\mathbf{v}^\top\boldsymbol{n}\,dS \;=\; 0\,. \tag{1.5}$$

Die weiteren Komponenten der Eulergleichung beschreiben Erhaltung von Impuls und Energie:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \rho\,\mathbf{v}\,dV + \int_{\partial\Omega} \rho\,\mathbf{v}\,\mathbf{v}^\top\boldsymbol{n} + p\boldsymbol{n}\,dS \;=\; \mathbf{0}\,, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega E\,dV + \int_{\partial\Omega} (E+p)\,\mathbf{v}^\top\boldsymbol{n}\,dS \;=\; \mathbf{0}\,. \tag{1.7}$$

Die Gleichungen (1.5), (1.6) und (1.7) zusammengenommen bilden ein Erhaltungsgesetz der Form (1.1). Dichte und Fluss sind

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{x},t) \;=\; \begin{pmatrix} u_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \rho(\boldsymbol{x},t) \\ \rho(\boldsymbol{x},t)\,\mathbf{v}(\boldsymbol{x},t) \\ \mathrm{E}(\boldsymbol{x},t) \end{pmatrix}\,, \tag{1.8}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) \;=\; \begin{pmatrix} \rho\mathbf{v}^\top \\ \rho\mathbf{v}\mathbf{v}^\top + \mathrm{p}\boldsymbol{I} \\ (\mathrm{E}+\mathrm{p})\mathbf{v}^\top \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \mathbf{u}_2^\top \\ \mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^\top/u_1 + \mathrm{p}(\mathbf{u})\boldsymbol{I} \\ (u_3+\mathrm{p}(\mathbf{u}))\mathbf{u}_2^\top/u_1 \end{pmatrix}\,, \tag{1.9}$$

wobei für $\mathrm{p}(\mathbf{u})$ noch eine Zustandsgleichung anzugeben ist.

Bemerkung 1.2. Ein Großteil der Literatur über hyperbolische Erhaltungsgesetze bezieht sich direkt auf die Eulergleichung, weswegen Grundkenntnisse der Gasdynamik beim Studium dieses Gleichungstyps hilfreich sein können.

Beispiel 1.2. Auch Verkehrsflussprobleme lassen sich durch Erhaltungsgesetze beschreiben.

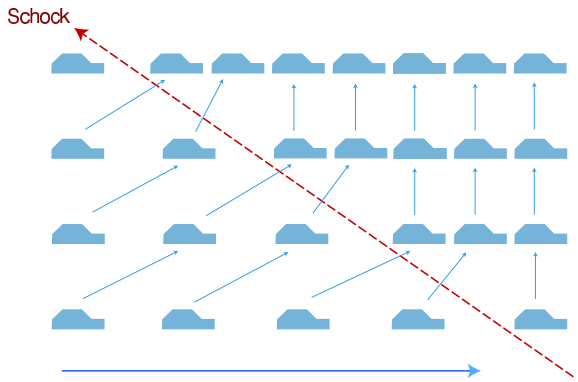

Abbildung 3: Auftreffen des Verkehrs auf einen Stau

In Analogie zur Massenerhaltungsgleichung läßt sich beispielsweise ein sehr einfaches, eindimensionales Modell mit der Anzahl der Fahrzeuge pro Kilometer als Dichtefunktion erstellen (alle Autos seien gleich lang). Der Fluss ist dann diese Dichte, multipliziert mit der Flussgeschwindigkeit v des Verkehrs.

Analog zur Massenerhaltung gibt es noch eine unbekannte Variable v, die wir aber in diesem Fall als bekannt annehmen. Wir stellen uns vor, dass v einfach nur von der Dichte des Verkehrs abhängt, und dass eine Höchstgeschwindigkeit v_{max} eingehalten wird:

$$v \;=\; \left(1 - \frac{u}{u_{max}}\right) v_{max}\,. \tag{1.10}$$

Dabei ist u_{max} die maximale (Stoßstange zu Stoßstange) Dichte des Verkehrs. Wir erhalten folgendes eindimensionale, skalare Erhaltungsgesetz:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,u(x,t) \;+\; \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1 - \frac{u(x,t)}{u_{max}}\right) u(x,t)\, v_{max}\right] \;=\; 0\,. \tag{1.11}$$

1.3 Klassische Lösung

Bevor man sich an die Suche nach einer Lösung des Erhaltungsgesetzes macht, muss man sich überlegen, in welchem Funktionenraum man sinnvollerweise suchen soll.

Wenn wir etwa unterstellen, dass $\mathbf{u}$ eine stetig differenzierbare Funktion ist, dann kann man die Gleichung (1.1) nach dem Satz von Gauß auch folgendermaßen schreiben:

$$\int_t \int_\Omega \mathbf{u}_t + \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{u})\, dV dt \;=\; \mathbf{0} \quad \forall\, t > 0,\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^n\,, \tag{1.12}$$

wobei $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{u}) := \mathbf{f}(\mathbf{u}) \cdot \nabla_x$ mit $\nabla_x := (\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n)^\top$.

Die Aussage (1.12) ist aber äquivalent mit der Forderung, dass $\mathbf{u}$ das innerhalb der Integrale stehende System von partiellen Differentialgleichungen *punktweise* löst.

Damit ist die Lösung des Erhaltungsgesetzes (1.1, 1.2) identisch mit der *punktweisen* Lösung des *Cauchyschen Anfangswertproblems*

$$\mathbf{u}_t \;+\; \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{u}) \;=\; \mathbf{0} \quad \forall\, t > 0,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\,, \tag{1.13}$$

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{x}, 0) \;=\; \mathbf{u}_0(\boldsymbol{x}) \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\,. \tag{1.14}$$

Wir geben dieser Art von Lösung einen eigenen Namen:

Definition 1.1 (klassische Lösung). Eine Funktion $\mathbf{u}(\boldsymbol{x}, t)$ heißt klassische Lösung des Erhaltungsgesetzes (1.1, 1.2), wenn sie stetig differenzierbar ist und das Cauchyproblem (1.13, 1.14) punktweise löst.

1.4 Schwache Lösung

Wie in Satz 2 festgeschrieben, besitzen selbst eindimensionale ($n = 1$) und gleichzeitig skalare ($m = 1$) Erhaltungsgesetze sogar bei stetig differenzierbaren Anfangsbedingungen nur in speziellen Fällen (Anfangsbedingung monoton steigend in x) eine klassische Lösung.

Aus diesem Grund müssen wir den Funktionenraum Φ, in dem wir nach der Lösung suchen, erweitern. Um einen solchen allgemeineren Lösungsbegriff zu erhalten, ersetzen wir in der Gleichung (1.13) die punktweise Auswertung durch eine distributive:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\phi}^\top (\mathbf{u}_t + \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{u}))\, dV dt \;=\; \mathbf{0} \quad \forall\, \boldsymbol{\phi} \in \Phi\,. \tag{1.15}$$

Dabei sollen die skalaren Testfunktionen $\boldsymbol{\phi}(x, t)$ kompakten Träger besitzen, i. e. $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}, t) = \mathbf{0}\, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \backslash K(\boldsymbol{\phi})$, wobei K eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist.

Falls man zusätzlich annimmt, dass die Testfunktionen stetig differenzierbar sind, erhält man mittels partieller Integration die sogenannte *schwache* Formulierung

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \left(\boldsymbol{\phi}_t^\top \mathbf{u} + \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\phi}_{x_i}^\top \mathbf{f}_i(\mathbf{u}) \right) dV dt \;=\; -\int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}, 0)^\top \mathbf{u}_0(\boldsymbol{x})\, dV \quad \forall\, \boldsymbol{\phi} \in \Phi\,. \tag{1.16}$$

Man beachte, dass in diese Gleichung die Randbedingung $\mathbf{u}(\boldsymbol{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\boldsymbol{x})\, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ bereits eingeflochten ist. Außerdem lässt sie auch nicht-glatte Lösungen $\mathbf{u}$ zu. Bei entsprechender Wahl des Funktionenraumes Φ sogar ist sie sogar äquivalent mit dem Erhaltungsgesetz (1.1, 1.2).

Wir halten den sich daraus ergebenden, neuen Lösungsbegriff fest:

Definition 1.2. Sei $\mathbf{u}_0 \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Eine Funktion $\mathbf{u} \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, \infty), \mathbb{R}^m)$ heißt *schwache Lösung* des Cauchy-Problems (1.1, 1.2), wenn sie die Gleichung (1.16) erfüllt und wenn $\mathbf{u}(\boldsymbol{x}, t) \in U$ f. ü.

1.5 Sprungbedingung

In der Praxis erweist es sich meist als ausreichend, schwache Lösungen im Raum der *stückweise stetig differenzierbaren* Funktionen zu suchen. Für solche Lösungen gilt der folgende

Satz 1 (Sprungbedingung). *Sei* $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to U$ *eine stückweise* C^1*-Funktion. Dann ist* $\mathbf{u}$ *genau dann eine schwache Lösung von (1.13), wenn*

- $\mathbf{u}$ *ist klassische Lösung dort, wo es stetig differenzierbar ist;*
- *entlang von Unstetigkeiten gilt*

$$(\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-)\, n_t + \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{f}_j(\mathbf{u}_+) - \mathbf{f}_j(\mathbf{u}_+))\, n_{x_j} = \mathbf{0}\,. \tag{1.17}$$

Beweis. siehe [2], pp. 16f. □

Wir betrachten zur Illustration den eindimensionalen Fall.

Nehmen wir an, der Sprung folge der Kurve $s(t)$. Mit $\alpha < s(t) < \beta$ folgt aus dem eindimensionalen Erhaltungsgesetz, dass

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(\mathbf{u}_+) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_-) &= \lim_{\alpha,\beta \to s(t)} \frac{d}{dt} \left[\int_\alpha^{s(t)} \mathbf{u}\, dx + \int_{s(t)}^{\beta} \mathbf{u}\, dx \right] = \\
&= \lim_{\alpha,\beta \to s(t)} \frac{d}{dt} \Big\{ \big[(s(t)-\alpha)\mathbf{u}_- + (\beta - s(t))\mathbf{u}_+\big] + \\
&\qquad\qquad + O(s(t)-\alpha) + O(\beta - s(t)) \Big\} = \\
&= s'(t)(\mathbf{u}_- - \mathbf{u}_+)\,.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Wenn das Erhaltungsgesetz linear ist, muss also die Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Sprunges ein Eigenwert der Systemmatrix $\boldsymbol{A}$ sein. Die Sprünge selbst sind Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$.

Beispiel 1.3. Wenn die beiden skalaren Gleichungen

$$u_t + \left(\frac{1}{2}\, u^2\right) = 0 \tag{1.19}$$

und

$$(u^2)_t + \left(\frac{2}{3}\, u^3\right) = 0 \tag{1.20}$$

glatte Lösungen besitzen, so sind diese klarerweise identisch. Falls die Lösungen aber Sprünge beinhalten, so ergeben sich aus der Sprungbedingung unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten und damit verschiedene schwache Lösungen.

1.6 Entropiebedingung

Wie bereits in Beispiel 2.2 zu sehen war, besitzt das Erhaltungsgesetz (1.1, 1.2) in der Regel mehrere schwache Lösungen. Der Grund dafür ist, dass man die Vernächlässigung der *Diffusion* eigentlich als den *Grenzfall* $\epsilon \to 0$ von Gleichungen

$$\mathbf{u}_t^{(\epsilon)} + \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{u}^{(\epsilon)}) = \epsilon D \Delta \mathbf{u}^{(\epsilon)} \quad \epsilon > 0,\ \forall\, t > 0,\ \boldsymbol{x} \in \Omega_0 \tag{1.21}$$

anzusehen hat.

Natürlich wird man diesen aufwendigen Grenzübergang bei der numerischen Lösung der Gleichung nicht tatsächlich durchführen. Aber es folgt daraus eine Bedingung, mit deren Hilfe man sehr einfach entscheiden kann, ob eine "physikalische" Lösung vorliegt oder nicht.

Zu diesem Zweck führen wir skalare Funktionen $\eta(\mathbf{u})$ und $\psi(\mathbf{u})$ ein mit den Eigenschaften

$$\nabla_u^2 \eta(\mathbf{u}) > 0\,, \tag{1.22}$$

$$\nabla_u \eta(\mathbf{u})^\top \operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \operatorname{div} \psi(\mathbf{u})\,. \tag{1.23}$$

Definition 1.3. Funktionen $\eta(\mathbf{u}) : U \to \mathbb{R}$ und $\psi(\mathbf{u}) : U \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften (1.22) und (1.23) heissen *Entropiefunktion* und zugehöriger *Entropiefluss*.

Bemerkung 1.3 (Existenz von Entropiefunktionen). Für skalare Gleichungen kann man natürlich zu jeder beliebigen konvexen Funktion den entsprechenden Entropiefluss konstruieren. Für mehrdimensionale Systeme müssen dafür zusätzliche Bedingungen erfüllt sein. Eine hinreichende Bedingung ist etwa die Symmetrie der Matrizen $\nabla_u \mathbf{f}_j$. Wir gehen darauf an dieser Stelle nicht näher ein und verweisen stattdessen auf [2], pp. 21–26.

Wir multiplizieren nun das Gleichungssystem (1.13) mit $\nabla_u \eta(\mathbf{u})^\top$ von links und erhalten für hinreichend glattes $\mathbf{u}$ die Eigenschaft

$$\eta(\mathbf{u})_t + \operatorname{div} \psi(\mathbf{u}) = 0 \quad \forall\, t > 0,\, \boldsymbol{x} \in \Omega_0\,. \tag{1.24}$$

Für schwache Lösungen ist hingegen die Integralform heranzuziehen:

$$\begin{aligned}
\int_t \int_\Omega [\eta(\mathbf{u}^{(\epsilon)})_t + \operatorname{div} \psi(\mathbf{u}^{(\epsilon)})]\, dV dt \;=& \\
&= \epsilon\, D \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \nabla_u \eta(\mathbf{u}^{(\epsilon)})^\top \Delta \mathbf{u}^{(\epsilon)}\, dV dt \;= \\
&= \epsilon\, D \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} (\nabla_x \mathbf{u}^{(\epsilon)} \nabla_u \eta(\mathbf{u}^{(\epsilon)})) \cdot \boldsymbol{n}\, dS dt \;- \\
&- \epsilon\, D \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega \sum_i \nabla_{x_i} \mathbf{u}^{(\epsilon)\,\top} \nabla_u^2 \eta(\mathbf{u}^{(\epsilon)}) \nabla_{x_i} \mathbf{u}^{(\epsilon)}\, dV dt\,.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Für $\epsilon \to 0$ verschwindet der erste Term der rechten Seite, womit diese aufgrund der geforderten Konvexität von η nichtpositiv ist.

Daraus folgt die Ungleichung

$$\int_\Omega \eta(\mathbf{u}(\boldsymbol{x}, t_2))\, dV \;\le\; \int_\Omega \eta(\mathbf{u}(\boldsymbol{x}, t_1))\, dV \;-\; \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} \psi(\mathbf{u}(x,t)) \cdot \boldsymbol{n}\, dS dt\,, \tag{1.26}$$

die üblicherweise als *Entropiebedingung* bezeichnet wird.

Mit diesen Ungleichungen gilt nun tatsächlich das

Lemma 1.4 („vanishing viscosity solution"). *Sei $D > 0$ ein linearer Operator derart, dass es ein $\epsilon_0 > 0$ gibt mit der Eigenschaft, dass die Gleichung (1.21) zu jedem $\epsilon \le \epsilon_0$ eine stetig differenzierbare, punktweise Lösungsfunktion $\mathbf{u}^{(\epsilon)}$ besitzt mit den Eigenschaften*

- $\mathbf{u}^{(\epsilon)} \to \mathbf{u}$ *für* $\epsilon \to 0$ *f. ü.*
- $\|\mathbf{u}^{(\epsilon)}\|_{L^\infty} \le C$,

wobei $C > 0$ eine von ϵ unabhängige Konstante ist.

Dann ist $\mathbf{u}$ *eine schwache Lösung des Erhaltungsgesetzes (1.1), und es erfüllt die Entropiebedingung (1.26).*

Beweis. siehe [2], pp. 27ff. □

Beispiel 1.4. Verwendet man in Beispiel 2.2 die Funktionen

$$\eta(u) = \frac{1}{2}u^2 \quad \text{und} \quad \psi(u) = \frac{1}{3}u^3\,, \tag{1.27}$$

so erhält man durch Einsetzen in (1.26) im Falle eines Sprunges

$$\frac{1}{2}(u_l^2 - u_r^2)s\Delta t - \frac{1}{3}(u_l^3 - u_r^3)\Delta t \;\leq\; 0\,. \tag{1.28}$$

Aus der Sprungbedingung (1.17) ersieht man, dass $s = (u_l + u_r)/2$, womit aufgrund von 1.28 ein Sprung genau dann vorliegt, wenn $u_l \geq u_r$, wenn also die Charakteristiken in ihn hineinlaufen. Letzteres ist folgt einem allgemeinen Prinzip: die Entropiebedingung verhindert, dass Charakteristiken in Schocks ihren Ursprung nehmen können.

Hinweis: $u_l^3 - u_r^3 = (u_l - u_r)(u_l^2 + u_l u_r + u_r^2)\,.$

2 Eindimensionale, skalare Gleichungen

2.1 Cauchy-Problem

Im folgenden betrachten wir das eindimensionale, skalare Cauchyproblem

$$u_t + f(u)_x = 0\,, \tag{2.1}$$
$$u(x,0) = u_0(x)\,. \tag{2.2}$$

Wir zeigen, dass man klassische Lösungen dieses Problems durch Integration entlang von speziellen Kurven, sogenannten *Charakteristiken*, erhalten kann.

Dazu schreiben wir die Erhaltungsgleichung in ihrer *quasilinearen* (nicht-konservativen) Form

$$u_t + \frac{df}{du}\,u_x = 0\,, \tag{2.3}$$

was möglich ist, da u eine klassische Lösung ist.

Unter Verwendung der Notation

$$a(u) := \frac{df}{du}(u)$$

definieren wir:

Definition 2.1 (Charakteristik). Eine Integralkurve $x(t)$ heißt Charakteristik der Gleichung (2.3), wenn $x'(t) = a(u(x(t),t))$.

Lemma 2.2. *Sei u eine klassische Lösung der Gleichung (2.1). Dann sind alle Charakteristiken Gerade. Entlang der Charakteristiken ist u konstant.*

Beweis. Zu zeigen ist lediglich die letzte Behauptung, da aus dieser unmittelbar folgt, dass $x'(t) = const.$ Aufgrund der Glattheitsanforderungen an die klassische Lösung gilt aber einfach

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u(x(t),t) &= \frac{\partial}{\partial t}u(x(t),t) + \frac{\partial}{\partial x}u(x(t),t)x'(t) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t}u(x(t),t) + \frac{\partial}{\partial x}u(x(t),t)a(u(x(t),t)) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t}u(x(t),t) + \frac{\partial}{\partial x}f(u(x(t),t)) = 0\,.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.1. Dieses Lemma gilt gleichermaßen für mehrdimensionale skalare Gleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u(\boldsymbol{x}(t),t) &= \frac{\partial}{\partial t}u(\boldsymbol{x}(t),t) + \nabla_x u(\boldsymbol{x}(t),t)^\top \boldsymbol{x}'(t) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t}u(\boldsymbol{x}(t),t) + \nabla_x u(\boldsymbol{x}(t),t)^\top \frac{d}{du}\mathbf{f}(u(\boldsymbol{x}(t),t)) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t}u(\boldsymbol{x}(t),t) + \operatorname{div}\mathbf{f}(u(\boldsymbol{x}(t),t)) = 0\,.\end{aligned}$$

Korollar 2.3. *Eine Charakteristik durch den Punkt $(x_0, 0)$ besitzt notwendigerweise die Form*

$$x(t) = x_0 + a(u_0(x_0))\,t\,. \tag{2.4}$$

Aus diesen Überlegungen folgt unmittelbar der wichtige

Satz 2. *Das eindimensionale, skalare Cauchy Problem (2.1, 2.2) besitzt genau dann eine klassische Lösung, wenn $a(u_0(x))$ monoton steigend in x ist.*

Beweis. Die von zwei Punkten $x_1 < x_2$ ausgehenden Charakteristiken

$$\begin{aligned}x_1(t) &= x_1 + a(u_0(x_1))\,t \\ x_2(t) &= x_2 + a(u_0(x_2))\,t\end{aligned}$$

schneiden sich zum Zeitpunkt

$$T = \frac{x_2 - x_1}{a(u_0(x_1)) - a(u_0(x_2))}\,. \tag{2.5}$$

Offenbar kann man genau dann eine klassische Lösung konstruieren, wenn für alle $x_1 < x_2$ gilt, dass $T \leq 0$. Aufgrund von (2.5) ist dies aber äquivalent mit der Forderung, dass $a(u_0(x))$ mononton steigend in x ist.

□

Behauptung 2.4. *Sei die Flussfunktion $f(u)$ in (2.1) konvex, und für die Anfangsbedingung gelte $u_0'(\xi) < 0$. Dann kreuzen sich die von einer Umgebung von ξ ausgehenden Charakteristiken spätestens zum Zeitpunkt*

$$T = -\frac{1}{f''(u_0(\xi))u_0'(\xi)}\,. \tag{2.6}$$

Beweis. Dies ersieht man sofort aus Abbildung 4, da natürlich

$$\lim_{h\to 0} h^{-1}(f'(u_0(\xi+h) - f'(u_0(\xi)) = f''(u_0(\xi))u_0'(\xi)\,. \tag{2.7}$$

□

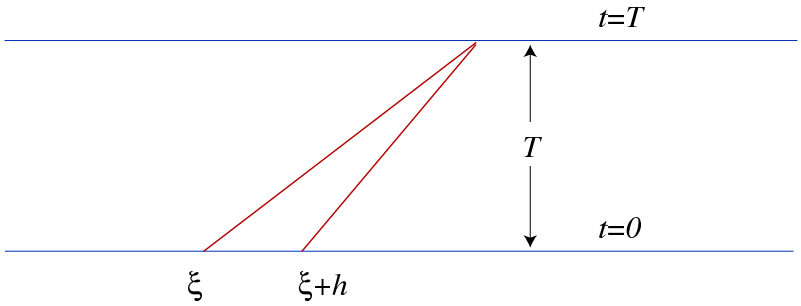

Abbildung 4: Bestimmung des Kreuzzeitpunktes

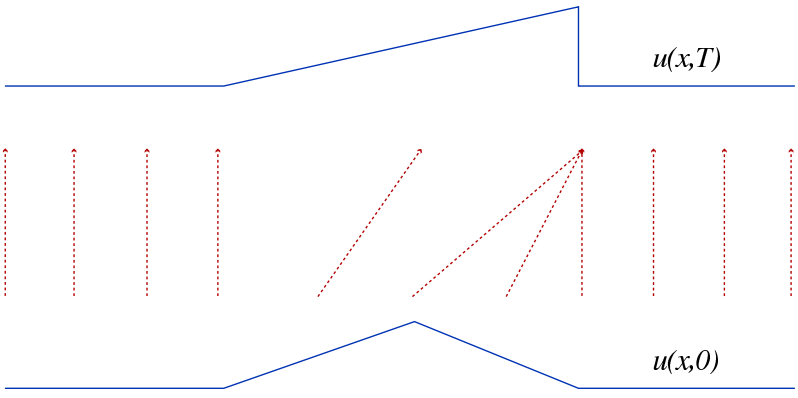

Abbildung 5: Schockbildung bei Burgers' Gleichung

In anderen Worten lautet die Aussage von Behauptung 2.4 so:

Korollar 2.5. *Das Cauchyproblem (2.1, 2.2) mit stetig differenzierbaren Anfangsdaten u_0 besitzt eine auf das auf das Zeitintervall $t \in [0, T]$ eingeschränkte klassische Lösung, wobei*

$$T = -\frac{1}{\min(\alpha, 0)}, \quad \alpha = \min_{x \in \mathbb{R}} \frac{d}{dx} a(u_0(x)) . \tag{2.8}$$

Beispiel 2.1 (Burgers Gleichung). Einen Extremfall, wo sich zeitgleich ein ganzes Bündel an Charakteristiken zur gleichen Zeit kreuzt, zeigt die Abbildung 5 anhand der Burgers Gleichung*, wo

$$f(u) = \frac{1}{2} u^2 .$$

Bemerkung 2.2. Im linearen Fall ($f(u)_x = au_x$) ist natürlich $f'' \equiv 0$, und damit schneiden sich nach (2.6) die Charakteristiken nach genau zum Zeitpunkt $T = \infty$ (Euklid), wenn nur $u_0'(\xi) < \infty \; \forall \xi$. Aus diesem Grund haben lineare Gleichungen mit stetig differenzierbarem u_0 immer eine klassische Lösung.

2.2 Riemann-Problem

Definition 2.6 (Skalares Riemannproblem). Das skalare Riemannproblem ist das eindimensionale, skalare Cauchyproblem (2.1, 2.2) mit den Anfangsdaten

$$u_0(x) = \begin{cases} u_- & x < 0 \\ u_+ & x > 0 . \end{cases} \tag{2.9}$$

Wir haben drei Fälle zu unterscheiden:

a) $f'(u_-) < f'(u_+)$,

b) $f'(u_-) = f'(u_+)$,

c) $f'(u_-) > f'(u_+)$,

wobei Gleichheit natürlich insbesondere dann gegeben ist, wenn das System linear ist (einen wichtigen Spezialfall bilden auch Gleichungen, bei denen diese Gleichheit ausgeschlossen werden kann, man bezeichnet diese als „echt nichtlinear“).

In Abbildung 6 sieht man, dass im Fall b) das Riemannproblem vollständig und in den Fällen a) und c) immerhin teilweise mit der Methode der Charakteristiken integriert werden kann.

Das folgende Beispiel zeigt, dass bereits sehr einfache Probleme mehrere schwache Lösungen besitzen können.

Beispiel 2.2 (Mehrdeutigkeit). Wir betrachten Burgers' Gleichung mit stückweise konstanten Anfangsdaten

$$u_0(x) = \begin{cases} u_- & x < 0 , \\ u_+ & x > 0 . \end{cases} \tag{2.10}$$

*Mit dem Begriff „Burgers Gleichung“ wird in dieser Vorlesung immer deren nicht-viskose, instationäre Form bezeichnet.

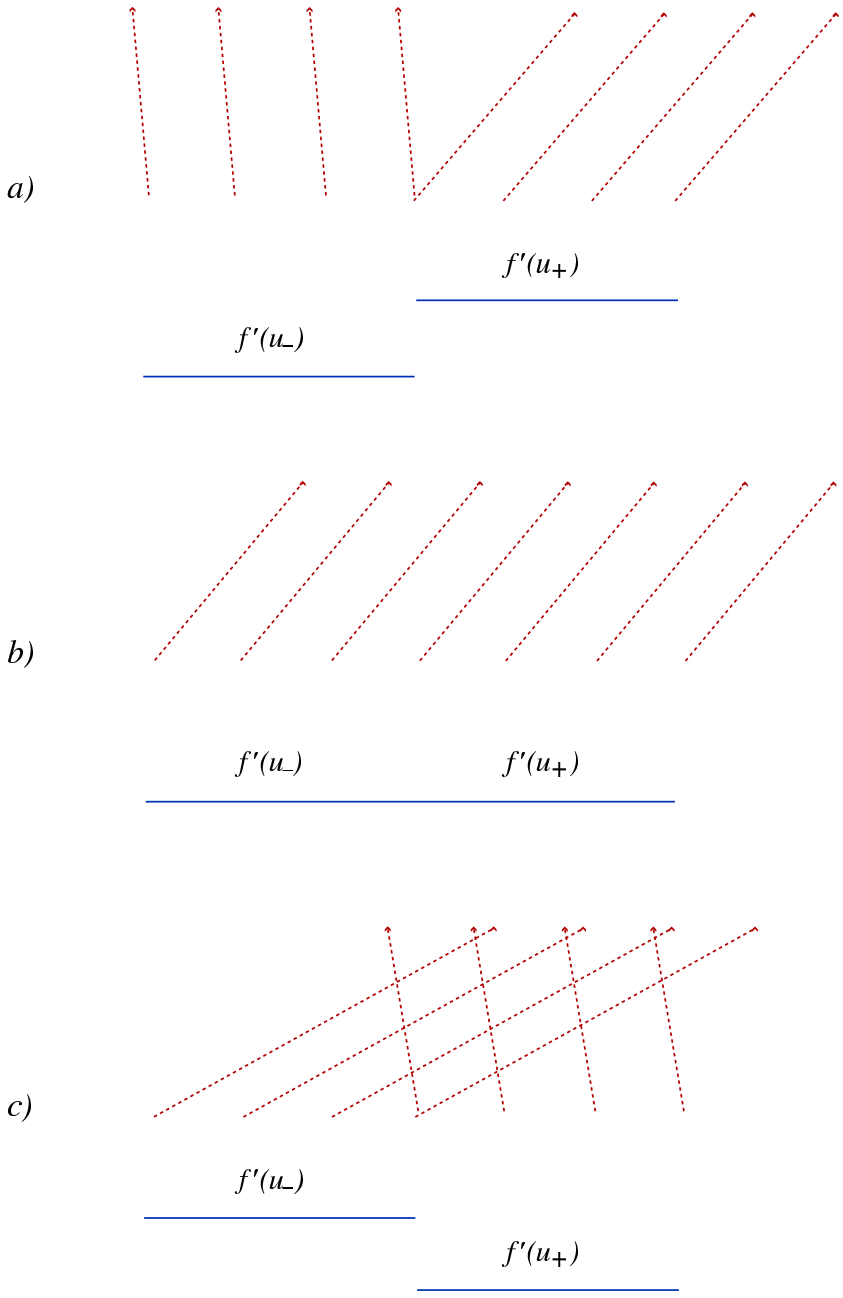

Abbildung 6: Schockausbreitung bei stückw. konst. Anfangswerten

Mit $s = (u_l + u_r)/2$ existiert eine Lösung der Form

$$u(x,t) \;=\; \begin{cases} u_- & x < s\,t\,, \\ u_+ & x > s\,t\,. \end{cases} \tag{2.11}$$

Eine weitere Lösung ist aber auch

$$u(x,t) \;=\; \begin{cases} u_- & x < (u_- - a)\,t/2\,, \\ -a & (u_- - a)\,t/2 < x < 0\,, \\ a & 0 < x < (u_+ + a)\,t/2\,, \\ u_+ & x > (u_+ + a)\,t/2 \end{cases} \tag{2.12}$$

für $a \geq \max(u_-, -u_+)$.

Für $u_- \leq u_+$ gibt es sogar eine stetige Lösung. In diesem Fall schneiden sich die Charakteristiken nicht (siehe Abbildung 6). Wegen

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{x}{t}) \;+\; \frac{x}{t}\,\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{t}) \;=\; -\frac{x}{t^2} \;+\; \frac{x}{t}\cdot\frac{1}{t} \;=\; 0 \tag{2.13}$$

ist die Funktion

$$u(x,t) \;=\; \begin{cases} u_- & x \leq u_-\,t \\ x/t & u_-\,t \leq x \leq u_+\,t \\ u_+ & x \geq u_+\,t \end{cases} \tag{2.14}$$

ebenfalls eine schwache Lösung des Erhaltungsgesetzes. Eine Lösung des Typs (2.14) nennt man *Verdünnungsfächer*.

Eine Lösung der Form

$$u(x,t) \;=\; \begin{cases} u_-\,, & x < s\,t\,, \\ u_+\,, & x > s\,t \end{cases} \tag{2.15}$$

mit

$$s \;=\; \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}$$

ist immer möglich. Für den Verdünnungsfächer gilt dagegen das

Lemma 2.7. *Zwei Zustände u_- und u_+ können nur dann durch einen selbstähnliche, glatte Funktion*

$$u(x,t) \;=\; w(x/t) \tag{2.16}$$

verbunden sein, wenn $f'(u_-) \leq f'(u_+)$.

Beweis. Durch Einsetzen von (2.16) in (2.1) erhält man die Bedingung

$$f'(w)w'(\xi) \;=\; \xi w'(\xi) \quad \text{für } \xi = x/t\,. \tag{2.17}$$

Damit ist eine solche Lösung u entweder konstant (die Übergänge zwischen den Zuständen müssen dann mittels Sprüngen erfolgen), oder sie ist ein eben ein glatter Übergang entlang der Integralkurve $f'(w(\xi)) = \xi$. Da ξ klarerweise monoton steigend sein muss (sonst ist $w(\xi)$ mehrdeutig), muss entlang dieser Integralkurve auch $f'(w(\xi))$ monoton steigen. Dies ist aber nur möglich, wenn $f'(u_-) \leq f'(u_+)$.

□

3 Eindimensionale Systeme

3.1 Lineare Systeme

Behauptung 3.1. *Eindimensionale, lineare Systeme von Erhaltungsgleichungen sind genau dann entkoppelbar, wenn sie hyperbolisch sind.*

Beweis. Wir betrachten die Gleichung

$$\mathbf{u}_t + \boldsymbol{A}\mathbf{u}_x = \mathbf{0}\,. \tag{3.1}$$

Die Systemmatrix $\boldsymbol{A}$ ist laut Definition genau dann diagonalisierbar, wenn die Gleichungen hyperbolisch sind, i. e.

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{-1}\,, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)\,,\ \lambda_j \in \mathbb{R}\,,\ j = 1, \dots, m\,, \tag{3.2}$$

was die Gleichungen transformiert zu

$$\mathbf{v}_t + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{v}_x = \mathbf{0}\,, \quad \mathbf{v} = \boldsymbol{Q}^{-1}\mathbf{u}\,. \tag{3.3}$$

□

Demnach erhält man m Scharen von Charakteristiken

$$x_{(j)}(t) = x_0 + \lambda_j\, t\,, \quad j = 1, \dots, m\,, \tag{3.4}$$

und die Lösungskomponenten sind

$$v_j(x,t) = v_j(x - \lambda_j\, t\,,\, 0)\,, \quad j = 1, \dots, m\,, \tag{3.5}$$

sodass

$$\mathbf{u}(x,t) = \boldsymbol{Q}\,\mathbf{v}(x,t) = \sum_{j=1}^{m} v_j(x - \lambda_j\, t\,,\, 0)\,\boldsymbol{q}_j\,, \tag{3.6}$$

womit $\mathbf{u}(x,t)$ nur von den Anfangswerten an den m Punkten $x - \lambda_j t$ abhängt.

Betrachten wir das zugehörige Riemannproblem:

Definition 3.2 (Lineares Riemannproblem). Das lineare Riemannproblem ist das eindimensionale Problem (3.1) mit den Anfangsdaten

$$\mathbf{u}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{u}_-\,, & x < 0 \\ \mathbf{u}_+\,, & x > 0\,. \end{cases} \tag{3.7}$$

Zur leichteren Handhabung der technischen Details nehmen wir zusätzlich an, das System sei strikt hyperbolisch, und wir ordnen die Eigenwerte

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n\,.$$

Zerlegen wir nun die Anfangswerte in ihre Komponenten bezüglich der Eigenvektorbasis, also

$$\mathbf{u}_- = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j\, \boldsymbol{q}_j\,, \quad \mathbf{u}_+ = \sum_{j=1}^{m} \beta_j\, \boldsymbol{q}_j\,, \tag{3.8}$$

so gilt

$$v_j(x,0) \;=\; \begin{cases} \alpha_j\,, & x<0\,, \\ \beta_j\,, & x>0\,, \end{cases} \tag{3.9}$$

und damit ist nach Gleichung (3.6)

$$\mathbf{u}(x,t) \;=\; \sum_{j=1}^{s} \beta_j\,\boldsymbol{q}_j \;+\; \sum_{j=s+1}^{m} \alpha_j\,\boldsymbol{q}_j\;, \tag{3.10}$$

wobei s der maximale Wert von j ist, für den $\lambda_j < x/t$.

Alternativ kann man dies so darstellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x,t) \;&=\; \mathbf{u}_- \;+\; \sum_{\lambda_j<x/t} (\beta_j-\alpha_j)\,\boldsymbol{q}_j \;= \\ &=\; \mathbf{u}_+ \;+\; \sum_{\lambda_j\geq x/t} (\beta_j-\alpha_j)\,\boldsymbol{q}_j\;. \end{aligned} \tag{3.11}$$

3.2 Linearisierung nichtlinearer Systeme

Im nichtlinearen Fall $\boldsymbol{A} = \mathbf{f}'(\mathbf{u})$ lässt sich die Transformation (3.2) nur lokal durchführen. Sowohl die Transformationsmatrix als auch die Koeffizienten der entkoppelten Gleichungen hängen dann von $\mathbf{u}$ ab. Für die Charakteristiken gilt

$$x'_{(j)}(t) = \lambda_{(j)}(\mathbf{u}(x(t),t)) \;\; (\lambda_{(j)}(\mathbf{u}) \text{ ist Eigenwert von } \mathbf{f}'(\mathbf{u}))\;. \tag{3.12}$$

Will man sich trotzdem die mächtige Theorie (und Numerik) linearer Systeme zugänglich machen, so kann man die Gleichungen unter bestimmten Voraussetzungen durch lineare Gleichungen annähern („linearisieren“).

So wird etwa in thermodynamischen Anwendungen häufig die Annahme getroffen, dass die zu untersuchenden Zustandsgrößen (Masse, Impuls, Druck, Temperatur, ...) nur relativ wenig um einen festen Mittelwert schwanken („akustische Theorie“):

$$\mathbf{u}(x,t) \;=\; \bar{\mathbf{u}} \;+\; \epsilon\,\tilde{\mathbf{u}}(x,t)\;, \tag{3.13}$$

womit

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) \;=\; \mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}) \;+\; \epsilon\,\nabla_u \mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}})^\top \tilde{\mathbf{u}} \;+\; \frac{1}{2}\,\epsilon^2\,\tilde{\mathbf{u}}^\top \nabla_u^2 \mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}})\,\tilde{\mathbf{u}} \;+\; \ldots\;. \tag{3.14}$$

Die Ableitung von (3.13) nach t bzw. x eingesetzt in die differentielle Erhaltungsgleichung ergibt

$$\mathbf{u}_t \;+\; \nabla_u \mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}})^\top \mathbf{u}_x \;=\; O(\epsilon)\;. \tag{3.15}$$

Damit spiegelt für kleines ϵ das linearisierte Erhaltungsgesetz mit $\boldsymbol{A} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}})$ das Systemverhalten für viele Anwendungen hinreichend genau wider.

3.3 Das Riemann-Problem

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit dem Riemannproblem, da zahlreiche numerische Verfahren für nichtlineare Gleichungen auf einer sukzessiven Lösung von Problemen dieser Art bauen. In seiner skalaren Form haben wir es bereits im Einführungskapitel kennengelernt. Für Systeme lautet es:

Definition 3.3 (Riemannproblem). Das Riemannproblem ist das eindimensionale Cauchyproblem mit den Anfangsdaten

$$\mathbf{u}_0(x) \;=\; \begin{cases} \mathbf{u}_- & x < 0 \\ \mathbf{u}_+ & x > 0\,. \end{cases} \tag{3.16}$$

Wir wollen uns an dieser Stelle auf zentrale Eigenschaften der Lösung konzentrieren, die für das Verständnis der weiter unten vorgestellten numerischen Verfahren notwendig sind.

Darüber hinaus gehend, sei hier lediglich angemerkt, dass es unter Umständen gar keine Lösung gibt, und dass es sogar möglich ist, dass es mehrere schwache Lösungen gibt, die auch der Entropiebedingung genügen.

Wir betrachten dabei lediglich *selbstähnliche* Lösungen, d. h. Lösungen der Form

$$\mathbf{u}(x,t) \;=\; \mathbf{w}(x/t)\,. \tag{3.17}$$

Für diese gilt klarerweise, dass

$$\mathbf{f}'\big(\mathbf{w}(\xi)\big)\,\mathbf{w}'(\xi) \;=\; \xi\,\mathbf{w}'(\xi) \quad \text{für } \xi = x/t\,. \tag{3.18}$$

Man beachte, dass im linearen Fall daraus unmittelbar folgt, dass entweder $\mathbf{w}'(\xi) = \mathbf{0}$, oder dass ξ ein Eigenwert der Matrix $\boldsymbol{A} = \mathbf{f}'(\mathbf{w})$ ist und $\mathbf{w}'$ der zugehörige Eigenvektor. Mit anderen Worten: die Lösung $\mathbf{u}$ springt beim Überqueren der Geraden $x/t = \lambda_i$ um ein Vielfaches des Eigenvektors $\boldsymbol{q}_i$. Dies haben wir im Abschnitt über lineare Gleichungen schon gesehen.

Im nichtlinearen Fall ist das Leben komplizierter, da im Fall $\mathbf{w}'(\xi) = 0$ auch ein glatter Übergang möglich ist, was man gemeinhin als "Verdünnungsfächer" (rarefaction wave) bezeichnet. Die Option eines Sprunges bleibt allerdings bestehen, wofür die Sprungbedingung (1.18) gilt.

Im Fall eines Verdünnungsfächers muss nach Gleichung (3.18) $\mathbf{w}'(\xi)$ ein Eigenvektor $\boldsymbol{q}_i(\xi)$ der lokalen Systemmatrix $\mathbf{f}'(\mathbf{w}(\xi))$ sein, wodurch die Integralkurve

$$\mathbf{w}'(\xi) \;=\; \alpha(\xi)\,\boldsymbol{q}_i\big(\mathbf{w}(\xi)\big) \tag{3.19}$$

bestimmt ist. Zwei Zustände $\mathbf{u}_1$ und $\mathbf{u}_2$ können also nur dann durch einen glatten Übergang verbunden sein, wenn sie auf einer solchen Integralkurve liegen. Des weiteren ist der Parameter ξ notwendigerweise ein Eigenwert der aktuellen Systemmatrix, also

$$\xi \;=\; \lambda_i\big(\mathbf{w}(\xi)\big)\,. \tag{3.20}$$

Damit muss entlang der Integralkurve der Eigenwert der Systemmatrix *monoton ansteigen*.

Zwei wichtige Spezialfälle machen das Leben unter Umständen leichter. Wenn das zugehörige Feld *echt nichtlinear* ist, dann reicht dazu die Forderung $\lambda_i(\mathbf{u}_1) < \lambda_i(\mathbf{u}_2)$. Wenn es *linear degeneriert* ist, dann ist $\lambda_i \equiv 0$ entlang der gesamten Integralkurve, und ein glatter Übergang ist eindeutig auszuschließen.

4 Mehrdimensionale, lineare Gleichungen

Die zeitliche Taylor-Entwicklung der Lösung

$$u(x,t) \;=\; u(x,0) + t\,\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) + \frac{1}{2}\,t^2\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,u(x,0) + \ldots \tag{4.1}$$

des eindimensionalen, skalaren Cauchyproblems (2.1, 2.2) kann man im Fall der linearen Gleichung $u_t + a u_x = 0$ schreiben als

$$u(x,t) \;=\; u(x,0) \;-\; at\,\frac{\partial}{\partial x}u(x,0) \;+\; \frac{1}{2}\,a^2t^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,u(x,0) \;-\; \ldots \tag{4.2}$$

In Operatorform sieht das so aus:

$$u(x,t) \;=\; e^{-t\,a\,\partial/\partial x}\,u(x,0)\,. \tag{4.3}$$

Im Fall der mehrdimensionalen linearen Gleichung $u_t + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} = 0$ lautet dieser Operator

$$u(\boldsymbol{x},t) \;=\; e^{-t\,\sum_{i=1}^n a_i\,\partial/\partial x_i}\,u(\boldsymbol{x},0)\,. \tag{4.4}$$

Damit kann man diese Gleichung lösen, indem man einfach die eindimensionalen Operatoren hintereinanderschaltet:

$$e^{-t\,\sum_{i=1}^n a_i\,\partial/\partial x_i} \;=\; \prod_{i=1}^{n} e^{-t\,a_i\,\partial/\partial x_i}\,. \tag{4.5}$$

Ein solches Vorgehen nennt man *dimensional splitting*.

Im Fall von *Systemen*

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i u_{x_i} = 0 \tag{4.6}$$

ist dieses Operator-splitting leider nicht exakt.

Im zweidimensionalen Fall gilt das

Lemma 4.1. *Wenn die Systemmatrizen nicht vertauschbar sind, d. h.* $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2 \neq \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1$*, dann sind Methoden, die auf der Aufspaltung (4.5) des Lösungsoperators zweidimensionaler, linearer Gleichungssysteme beruhen, höchstens von erster Ordnung:*

$$e^{-t\,\boldsymbol{A}_1\,\partial/\partial x_1}\,e^{-t\,\boldsymbol{A}_2\,\partial/\partial x_2} \;=\; e^{-t\,(\boldsymbol{A}_1\,\partial/\partial x_1 + \boldsymbol{A}_2\,\partial/\partial x_2)} \;+\; O(t^2)\,.$$

Eine Operator-Aufspaltung von höherer Ordnung folgt aus einem Resultat von G. Strang:

Lemma 4.2 (Strang).

$$e^{-(t/2)\,\boldsymbol{A}_1\,\partial/\partial x_1}\,e^{-t\,\boldsymbol{A}_2\,\partial/\partial x_2}\,e^{-(t/2)\,\boldsymbol{A}_1\,\partial/\partial x_1} \;=\; e^{-t\,(\boldsymbol{A}_1\,\partial/\partial x_1 + \boldsymbol{A}_2\,\partial/\partial x_2)} \;+\; O(t^3)\,.$$

Beide Resultate prüft man leicht nach, indem man die Taylorreihen der linken Seiten unter Weglassen aller Terme von höherer Ordnung als 2 ausmultipliziert.

Für entkoppelbare Systeme von linearen, hyperbolischen Erhaltungsgesetzen ist diese Vertauschbarkeit immer gegeben. *Strikt* hyperbolische Systeme sind sogar nur dann entkoppelbar, wenn die Systemmatrizen vertauschbar sind:

Lemma 4.3. *Seien* $\boldsymbol{A}$ *und* $\boldsymbol{B}$ *reguläre Matrizen mit ausschließlich reellen Eigenwerten. Dann gilt*

a) Wenn $\boldsymbol{A}$ *und* $\boldsymbol{B}$ *die selbe vollständige Eigenvektorbasis besitzen, sind sie vertauschbar.*

b) Wenn $\boldsymbol{A}$ *und* $\boldsymbol{B}$ *vertauschbar sind und* $\boldsymbol{A}$ *nur Eigenwerte der arithmetischen Vielfachheit 1 besitzt, so besitzen* $\boldsymbol{A}$ *und* $\boldsymbol{B}$ *die selben Eigenvektoren.*

Beweis. Sei $\boldsymbol{Q}$ eine vollständige Eigenvektorbasis der Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$. Dann folgt die Vertauschbarkeit aus

$$\boldsymbol{AB} \;=\; \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_A\boldsymbol{\Lambda}_B\boldsymbol{Q} \;=\; \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_B\boldsymbol{\Lambda}_A\boldsymbol{Q} \;=\; \boldsymbol{BA}\,.$$

Seien andererseits $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ vertauschbar und $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ein Eigenvektor von $\boldsymbol{A}$ mit Eigenwert λ. Es ist also $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0$, und aufgrund der Vertauschbarkeit ist gleichzeitig $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = 0$. Damit ist auch $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ ein Eigenvektor der Matrix $\boldsymbol{A}$ zum Eigenwert λ, womit er (Vielfachheit 1) von $\boldsymbol{x}$ linear abhängig sein muss. Da $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ (Regularität), gibt es also ein $\mu \neq 0$ derart, dass $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} - \mu\boldsymbol{x} = 0$. Somit ist $\boldsymbol{x}$ notwendigerweise ein Eigenvektor von $\boldsymbol{B}$.

□

5 Numerik linearer Gleichungen

5.1 Grundbegriffe

Wir betrachten zunächst nur eindimensionale Gleichungssysteme. Wir suchen also eine numerische Lösung an Orten

$$x_j, \quad j \;=\; \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots \tag{5.1}$$

zu Zeiten

$$t_n, \quad n \;=\; 0, 1, 2, \ldots \tag{5.2}$$

Ferner definieren wir sogenannte *Zellen* mit den Randpunkten

$$x_{j+1/2} \;=\; \frac{1}{2}\,(x_j + x_{j+1}) \tag{5.3}$$

und die *Diskretisierungsfeinheiten*

$$\Delta x \;=\; \max_j\,(x_{j+1} - x_j)\,, \tag{5.4}$$

$$\Delta t \;=\; \max_n\,(t_{n+1} - t_n)\,, \tag{5.5}$$

$$\Delta\,(x,t) \;=\; \max\,(\Delta x, \Delta t)\,. \tag{5.6}$$

Die am meisten verwendeten Repräsentanten (= zu rekonstruierenden Werte) der *exakten* Lösungen sind

$$\mathbf{u}_j^n \;=\; \mathbf{u}(x_j, t_n)\,, \tag{5.7}$$

$$\bar{\mathbf{u}}_j^n \;=\; \frac{2}{x_{j+1} - x_{j-1}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{u}(x, t_n)\,. \tag{5.8}$$

Wir bezeichnen $\mathbf{u}_j^n$ als den *punktweisen Repräsentanten* und $\bar{\mathbf{u}}_j^n$ als das *Zellenmittel*.

Die numerische Approximation des gewählten Repräsentanten bezeichnen wir mit $\mathbf{U}_j^n$. Die Differenz zwischen Approximation und dem exakten Repräsentanten bezeichnen wir als *globalen Fehler*. Wir verwenden die Notationen

$$\mathcal{E}_j^n \;=\; \mathbf{U}_j^n \;-\; \mathbf{u}_j^n\,, \tag{5.9}$$

$$\bar{\mathcal{E}}_j^n \;=\; \mathbf{U}_j^n \;-\; \bar{\mathbf{u}}_j^n\,. \tag{5.10}$$

Weiterhin definieren wir

$$\mathbf{U}^n \;=\; [\dots, \mathbf{U}^n_{-1}, \mathbf{U}^n_0, \mathbf{U}^n_1, \mathbf{U}^n_2, \dots] \,, \tag{5.11}$$

eine auf den Zellen stückweise konstante Funktion

$$\mathbf{U}(x,t) \;=\; \mathbf{U}^n_j \quad \text{für } (x,t) \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}) \times [t_n, t_{n+1}) \tag{5.12}$$

und eine *Fehlerfunktion*

$$\mathcal{E}(x,t) \;=\; \mathbf{U}(x,t) \,-\, \mathbf{u}(x,t) \,. \tag{5.13}$$

Bemerkung 5.1. Der Tatsache, dass man Anfangsbedingungen tatsächlich nur auf einem endlichen Gebiet $[a,b]$ vorgeben kann, wird gewöhnlich mittels *periodischer Randbedingungen*

$$\mathbf{u}(a,t) \;= \mathbf{u}(b,t) \quad \forall\, t \geq 0 \tag{5.14}$$

Rechnung getragen.

Die Konstruktion der numerischen Lösung instationärer (= zeitabhängiger) Cauchy-probleme erfolgt gewöhnlich in *Zeitschritten*, d. h. aus den Anfangsbedingungen $\mathbf{U}^0$ werden sukzessiv Lösungen $\mathbf{U}^1, \mathbf{U}^2, \dots$ erzeugt.

Wenn die Verfahrensvorschrift für $\mathbf{U}^n_j$ nur von Werten aus der Vergangenheit abhängt, spricht man von einem *expliziten* Verfahren. Hängt sie auch von Werten der selben Zeitebene ab, ist das Verfahren *implizit*, und es muss in jedem Zeitschritt ein Gleichungssystem gelöst werden. Instationäre hyperbolische Gleichungen, wie wir sie hier behandeln, werden nur sehr selten mit impliziten Verfahren gelöst. Außerdem werden fast immer *Einschrittverfahren* verwendet, d. h. $\mathbf{U}^{n+1}$ wird ausschließlich aus $\mathbf{U}^n$ rekonstruiert:

$$\mathbf{U}^{n+1}_j \;=\; \mathcal{T}(\mathbf{U}^n, j) \,. \tag{5.15}$$

Der Zeitschritt-Operator $\mathcal{T}$ kann auch auf eine Funktion $\mathbf{u}(\cdot, t_n)$ angewendet werden, indem wir sein Definitionsgebiet vom Punkt x_j auf die ihn umgebende Zelle $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$ erweitern. Wir wollen dies an einem Beispiel illustrieren.

Beispiel 5.1 (Lax-Friedrichs). Der Zeitschritt des *Lax-Friedrichs-Verfahrens* lautet

$$\mathcal{T}(\mathbf{U}^n, j) \;=\; \frac{1}{2}\,(\mathbf{U}^n_{j+1} + \mathbf{U}^n_{j-1}) \,-\, \frac{t_{n+1} - t_n}{x_{j+1} - x_{j-1}}\, A\,(\mathbf{U}^n_{j+1} - \mathbf{U}^n_{j-1}) \,. \tag{5.16}$$

Die zugehörige Funktionalsform des Zeitschrittoperators ist dann

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, t_{n+1}) \;&= \mathcal{T}(\mathbf{u}(\cdot, t_n), x) \;= \\ &= \frac{1}{2}\,(\mathbf{u}(x + x_{j+1} - x_j, t_n) + \mathbf{u}(x + x_{j-1} - x_j, t_n)) \,- \\ &\quad - \frac{t_{n+1} - t_n}{x_{j+1} - x_{j-1}}\, A(\mathbf{u}(x + x_{j+1} - x_j, t_n) - \mathbf{u}(x + x_{j-1} - x_j, t_n)) \\ &\quad \text{für } x \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}) \,. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Wenn wir diese Form des Zeitschritts insbesondere auf die stückweise konstante Funktion $\mathbf{U}(x,t)$ nach (5.12) anwenden, erhalten wir wiederum eine stückweise konstante Funktion

$$\mathbf{U}(x, t_{n+1}) \;=\; \mathcal{T}(\mathbf{U}(\cdot, t_n), x) \,. \tag{5.18}$$

Definition 5.1 (lineare Verfahren). Wenn der Operator $\mathcal{T}$ linear ist, wenn also

$$\mathcal{T}(\alpha\,\tilde{\mathbf{U}}^n + \beta\,\hat{\mathbf{U}}^n) \;=\; \alpha\,\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{U}}^n) + \beta\,\mathcal{T}(\hat{\mathbf{U}}^n)\,, \tag{5.19}$$

spricht man von einem linearen Verfahren, und man schreibt

$$\mathbf{U}^{n+1} \;=\; \mathcal{T}\,\mathbf{U}^n\,. \tag{5.20}$$

Um das *Fehlerverhalten* eines Verfahrens messen zu können, benötigt man eine *Metrik*. Idealerweise hofft man auf Konvergenz in der ∞-Norm

$$\|\mathbf{v}\|_\infty \;=\; \sup_x \|\mathbf{v}(x)\|\,, \tag{5.21}$$

aber dies ist unrealistisch, wenn man unstetige Lösungen approximiert.

Die Norm der Wahl für Erhaltungsgesetze ist gewöhnlich die 1-Norm, also

$$\|\mathbf{v}\|_1 \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \|\mathbf{v}(x)\|\,dx\,. \tag{5.22}$$

Bemerkung 5.2. Für lineare Gleichungen bevorzugt man die 2-Norm

$$\|\mathbf{v}\|_2 \;=\; \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|\mathbf{v}(x)\|^2\,dx\right)^{1/2}\,, \tag{5.23}$$

da man auf lineare Probleme die Fourier-Zerlegung anwenden kann mit der nützlichen Parselval-Beziehung

$$\|\hat{\mathbf{v}}\|_2 \;=\; \|\mathbf{v}\|_2\,, \tag{5.24}$$

was die Analyse der Verfahren erheblich vereinfacht.

Den Fehler, der durch die Restriktion der Erhaltungsgesetze auf das diskrete Gitter entsteht, nennt man *Diskretisierungsfehler*:

Definition 5.2 (Diskretisierungsfehler). Für Einschrittmethoden heißt

$$\mathcal{D}(x,t_n) \;=\; \frac{1}{t_{n+1}-t_n}\Big(\mathbf{u}(x,t_{n+1}) \;-\; \mathcal{T}\big(\mathbf{u}(\cdot,t_n),\,x\big)\Big) \tag{5.25}$$

der Diskretisierungsfehler des Verfahrens im Zeitschritt $n+1$.

Damit definieren wir die Begriffe *Konsistenz* und *Fehlerordnung*.

Definition 5.3 (Konsistenz). Ein Verfahren ist konsistent in der Norm $\|\cdot\|$, wenn

$$\|\mathcal{D}(\cdot,t)\| \;\to\; 0 \quad \text{für } \Delta(x,t) \;\to\; 0\,. \tag{5.26}$$

Bemerkung 5.3. Um die Notation zu vereinfachen, beschränken wir uns bis auf weiteres auf äquidistante räumliche Gitter und Zeitschritte. Wir schreiben

$$x_{j+1} - x_j \;=\; h \quad \text{und} \quad t_{n+1} - t_n \;=\; k\,. \tag{5.27}$$

Des weiteren gehen wir bei Grenzübergängen $\Delta(x,t) \to 0$ in von einem festen Verhältnis k/h aus, sodass es genügt zu schreiben, dass $k \to 0$.

Definition 5.4 (Fehlerordnung). Ein Verfahren ist von der Fehlerordnung p (kurz: ist von p-ter Ordnung), wenn es für hinreichend glatte Anfangsdaten auf kompaktem Träger für jedes $T > 0$ Konstanten κ und τ gibt, sodass in jedem Zeitschritt

$$\|\mathcal{D}(\cdot,t_n)\| \;\le\; \kappa\,k^{\,p}\,, \tag{5.28}$$

$$\text{wenn } \; k < \tau \text{ und } \; nk = t_n < T\,. \tag{5.29}$$

5.2 Stabilität und CFL-Bedingung

Schreibt man die Gleichung (5.25) um in

$$\mathbf{u}(x, t_{n+1}) \;=\; \mathcal{T}(\mathbf{u}(\cdot, t_n), x) + k\,\mathcal{D}(x, t_n)\,, \tag{5.30}$$

Subtrahiert man davon die Gleichung (5.18) und nimmt zusätzlich an, dass der Zeitschrittoperator linear ist, so erhält man

$$\mathcal{E}(\cdot, t_{n+1}) \;=\; \mathcal{T}\,\mathcal{E}(\cdot, t_n) + k\,\mathcal{D}(\cdot, t_n)\,, \tag{5.31}$$

womit

$$\mathcal{E}(\cdot, t_n) \;=\; \mathcal{T}^n\,\mathcal{E}(\cdot, 0) \;+\; \sum_{i=1}^{n} k\,\mathcal{T}^{n-i}\,\mathcal{D}(\cdot, t_{i-1})\,. \tag{5.32}$$

Dies ergibt die Fehlerabschätzung

$$\|\mathcal{E}(\cdot, t_n)\| \;\le\; \|\mathcal{T}^n\|\,\|\mathcal{E}(\cdot, 0)\| \;+\; \sum_{i=1}^{n} k\,\|\mathcal{T}^{n-i}\|\,\|\mathcal{D}(\cdot, t_{i-1})\|\,. \tag{5.33}$$

Wenn wir annehmen, dass unsere Methode gemäß Definition 5.4 von p-ter Ordnung ist, dann gibt es für jedes T ein κ und ein τ derart, dass

$$\|\mathcal{E}(\cdot, t_n)\| \;\le\; \|\mathcal{T}^n\|\,\|\mathcal{E}(\cdot, 0)\| \;+\; \kappa \sum_{i=1}^{n} k^{\,p+1}\,\|\mathcal{T}^{n-i}\| \tag{5.34}$$

für $t_n < T$ und $\Delta t < \tau$.

Um diesen Fehler unter Kontrolle zu bekommen, reicht also Konsistenz allein nicht aus. Selbst eine beliebig hohe lokale Fehlerordnung würde nicht weiterhelfen. Was wir noch unbedingt brauchen, ist *Stabilität*. Wir verwenden dazu eine Definition nach Lax und Richtmyer:

Definition 5.5 (Stabilität). Ein Verfahren ist stabil, wenn es für jedes $T > 0$ Konstante σ und τ gibt, sodass für alle n mit $t_n \le T$ gilt:

$$\|\mathcal{T}^n\| \;\le\; \sigma\,, \quad \text{wenn } \Delta t \le \tau\,. \tag{5.35}$$

Mit dieser Stabilitätsforderung gibt es nun aber auch ein τ derart, dass

$$\|\mathcal{E}(\cdot, t_n)\| \;\le\; \sigma\left(\|\mathcal{E}(\cdot, 0)\| \;+\; \kappa \sum_{i=1}^{n} k^{\,p+1}\right) \tag{5.36}$$

für $t_n < T$ und $\Delta t < \tau$. Damit konvergiert das Verfahren. Insbesondere gilt für konstanten Zeitschritt der Länge k, dass

$$\|\mathcal{E}(\cdot, t_n)\| \;\le\; \sigma\left(\|\mathcal{E}(\cdot, 0)\| \;+\; \kappa\,T\,k^{p}\right)\,, \tag{5.37}$$

womit im Fall von exakten Anfangsdaten die globale Konvergenzordnung mit der Konsistenzordnung des Verfahrens identisch ist, wenn das Verfahren stabil ist. Nach dem *Lax Equivalence Theorem* ist Stabilität sogar *notwendig* für Konvergenz, siehe z. B. [7, 9].

Eine bekannte *notwendige* (sic!) Bedingung für die Stabilität eines Differenzenschemas wurde bereits im Jahr 1928 in einem Paper von Courant, Friedrichs und Levy festgeschrieben. Sie heißt deswegen *CFL-Bedingung:*

Definition 5.6 (CFL-Bedingung). Ein Differenzenschema erfüllt die CFL-Bedingung, wenn sein Abhängigkeitsbereich den Abhängigkeitsbereich der Differentialgleichung enthält.

Für eindimensionale, lineare Gleichungssysteme ist die CFL-Bedingung sehr einfach zu überprüfen, denn ihr Abhängigkeitsbereich ergibt sich unmittelbar aus der Lösungsdarstellung

$$\mathbf{u}(x_j, t_{n+1}) \;=\; \sum_{i=1}^{m} v_i \left(x_j - \lambda_i \left(t_{n+1} - t_n\right), t_n\right) \boldsymbol{q}_i \,. \tag{5.38}$$

Demnach erfüllt ein Schema die CFL-Bedingung, wenn für seinen Abhängigkeitsbereich $[a, b]$ gilt, dass

$$a \;\le\; x_j \;-\; \lambda_i \left(t_{n+1} - t_n\right) \;\le\; b \,, \quad 1 \le i \le m \,. \tag{5.39}$$

In Einzelfällen ist die CFL-Bedingung sogar *hinreichend* für Stabilität. Transformiert man etwa das Lax-Friedrichs-Schema

$$\mathbf{U}_j^{n+1} \;=\; \frac{1}{2}\left(\mathbf{U}_{j+1}^n + \mathbf{U}_{j-1}^n\right) \;-\; \frac{k}{2h}\, \boldsymbol{A}\left(\mathbf{U}_{j+1}^n - \mathbf{U}_{j-1}^n\right) . \tag{5.40}$$

mit der Eigenvektorbasis $\boldsymbol{Q}$, so erhält man m skalare Differenzengleichungen der Form

$$V_j^{n+1} \;=\; \frac{1}{2}\left(V_{j+1}^n + V_{j-1}^n\right) \;-\; \frac{k}{2h}\, \lambda_j \left(V_{j+1}^n - V_{j-1}^n\right) . \tag{5.41}$$

Damit hat die CFL-Bedingung (5.39) mit $a = x_j - h$, $b = x_j + h$ und $t_{n+1} = t_n + k$ die sehr einfache Form

$$\left|\lambda_i\right| \;\le\; \frac{h}{k} \,, \quad i = 1, \ldots, m \,. \tag{5.42}$$

Die Bedingung (5.42) ist nun tatsächlich hinreichend für Stabilität in der diskreten 1-Norm wegen

$$\begin{aligned} \|V^{n+1}\| \;&=\; h \sum_j |V_j^{n+1}| \;\le \\ &\le\; \frac{h}{2}\left(\sum_j \left|\left(1 - \frac{k}{h}\,\lambda_i\right) V_{j+1}^n\right| \;+\; \sum_j \left|\left(1 + \frac{k}{h}\,\lambda_i\right) V_{j-1}^n\right|\right) \;= \\ &=\; \frac{1}{2}\left(\left(1 - \frac{k}{h}\,\lambda_i\right)\|V^n\| \;+\; \left(1 + \frac{k}{h}\,\lambda_i\right)\|V^n\|\right) \;= \\ &=\; \|V^n\| \,. \end{aligned} \tag{5.43}$$

Mit den exakt gleichen Argumenten erhält man für das einfache Upwind-Verfahren

$$\mathbf{U}_j^{n+1} \;= \mathbf{U}_j^n \;-\; \frac{k}{h}\, \boldsymbol{A}\left(\mathbf{U}_j^n - \mathbf{U}_{j-1}^n\right) \tag{5.44}$$

Stabilität unter dessen CFL-Bedingung

$$0 \;\le\; \frac{h}{k}\,\lambda_i \;\le\; 1 \,, \quad i = 1, \ldots, m \,. \tag{5.45}$$

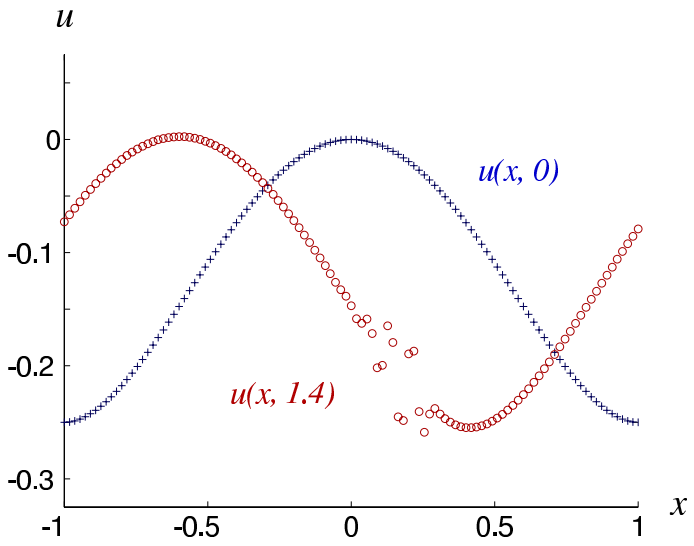

Abbildung 7: Instabilität bei Verletzung der CFL-Bedingung

Beispiel 5.2. Was konkret passieren kann, wenn die CFL-Bedingung verletzt ist, zeigt die Abbildung 7. Hier wurde das Lax-Friedrichs-Schema angewandt auf das periodische Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) \;+\; \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) \;&=\; 0\,, \\ u(x,0) \;=\; \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{2}x^2-1\right) \quad &\text{für } x\in[-1,1]\,, \\ u(1,t) \;=\; u(-1,t) \quad &\text{für } t\in[0,\infty)\,. \end{aligned} \tag{5.46}$$

Solange die CFL-Bedingung eingehalten wird, läuft die Welle ohne Probleme durch das Intervall $[-1,1]$. Die blauen Kreise zeigen die Anfangsbedingung, welche mit der Lösung zu den Zeitpunkten $T = 2, 4, \ldots$ fast exakt übereinstimmt, wenn $h = k$ gewählt wird*. Die roten Kreise stellen die Lösung zum Zeitpunkt $T = 4$ dar, die das Schema mit $k = 1/50$ und $h = 1/55$ liefert.

Bemerkung 5.4 (Neumann Stabilität). Ein mächtiges Instrument zur Stabilitätsuntersuchung von linearen Schemen ist die *Von Neumann Analyse*, die auf der Fouriertransformation beruht. Dieses Konzept läßt sich aber nicht sinnvoll auf nichtlineare Systeme übertragen, weswegen wir es hier ausklammern.

5.3 Numerische Diffusion und Dispersion

Untersuchen wir zunächst das Lax-Friedrichs-Schema (5.40). Wenn man dort anstelle der approximierten Werte die exakten einsetzt, erhält man

$$\mathbf{u}_t + \boldsymbol{A}\,\mathbf{u}_x \;=\; \frac{h^2}{2k}\left(\boldsymbol{I}-\left(\frac{k}{h}\boldsymbol{A}\right)^2\right)\mathbf{u}_{xx} + o(h^2) + o(k^2)\,. \tag{5.47}$$

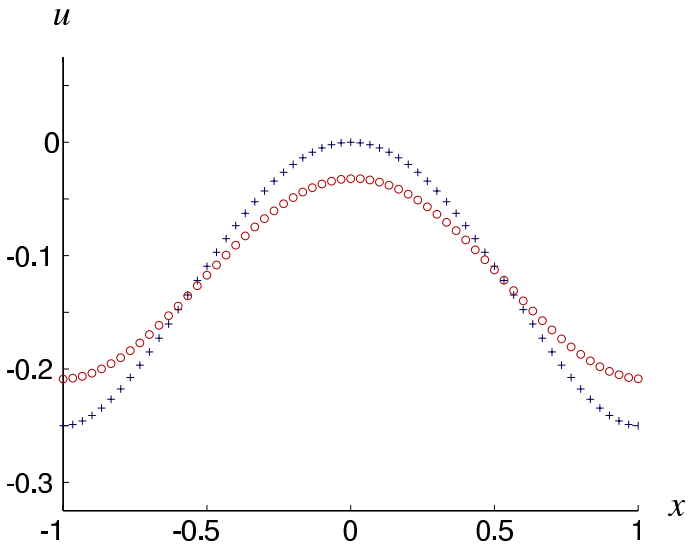

Abbildung 8: Lax-Friedrichs Diffusion an glatter Lösung

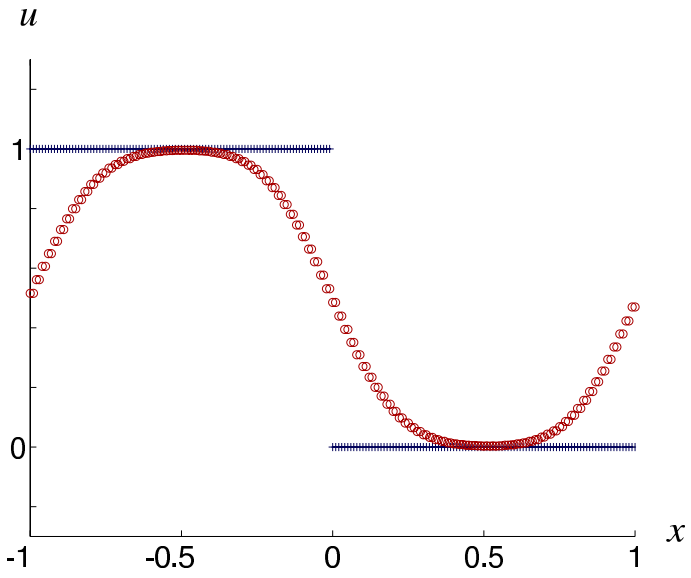

Abbildung 9: Lax-Friedrichs Diffusion an unstetiger Lösung

Als erstes sieht man, dass das Lax-Friedrichs-Verfahren offenbar die Genauigkeitsordnung 1 besitzt. Verblüffenderweise ist es aber ein Verfahren 2. Ordnung für eine Gleichung, die Diffusion beinhaltet. Man spricht in diesem Zusammenhang von *numerischer Diffusion*. In Abbildung 8 sieht man diese Diffusion am Vergleich der Lösungen von Beispiel 5.2 zum Zeitpunkt $T = 2$ mit $h = k = 1/30$ (blaue Pluszeichen) und $h = 1/30$, $k = 1/50$ (rote Kreise). Abbildung 9 zeigt die numerische Diffusion bei $h = 1/100$, $k = 1/200$ für das Riemann-Problem mit $u_- = 1$ und $u_+ = 0$.

Insbesondere werden Verfahren mit positiver Diffusion natürlich dazu neigen, Unstetigkeiten „auszuglätten".

Für $h/k > 1$ verschwindet die Diffusion erst bei unendlich feinem Gitter. Dies hat allerdings auch eine positive Konsequenz, denn es wird damit (so wie andere Verfahren erster Ordnung mit positiver Diffusion) automatisch die gesuchte *vanishing-viscosity-solution* approximiert.

Die Gleichung (5.47) lässt andererseits direkte Rückschlüsse auf die Stabilität des Verfahrens zu. Denn das Anfangswertproblem zur Gleichung (5.47) ist klarerweise nur dann korrekt gestellt, wenn der Diffusionsoperator

$$\boldsymbol{D} \;=\; \frac{h^2}{2k}\left(\boldsymbol{I} - \left(\frac{k}{h}\boldsymbol{A}\right)^2\right) \tag{5.48}$$

positiv definit ist, denn sonst hätte man Anteile der Lösung, die durch rückläufige Diffusion* charakterisiert wären.

Das bedeutet, dass alle Eigenwerte

$$\frac{h^2}{2k}\left(1 - \left(\frac{k}{h}\lambda_i\right)^2\right) \tag{5.49}$$

positiv sein müssen, was äquivalent ist mit der Forderung

$$|\lambda_i| \;\leq\; \frac{h}{k}\,, \quad i = 1, \ldots, m\,. \tag{5.50}$$

Dies entspricht aber genau der CFL-Bedingung.

Analoges gilt für das Upwind-Schema (5.44), dessen „modifizierte" Gleichung

$$\mathbf{u}_t + \boldsymbol{A}\,\mathbf{u}_x \;=\; \frac{h}{2}\,\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{I} - \frac{k}{h}\boldsymbol{A}\right)\mathbf{u}_{xx} + o(h^2) + o(k^2)\,. \tag{5.51}$$

vergleichsweise etwas weniger Diffusion beinhaltet. Die Entsprechungen zu den Abbildungen 8 und 9 mit den selben Gitterweiten zeigen die Abbildungen 10 und 11. Aus der Forderung nach nichtnegativer Diffusion ergibt sich wiederum die Stabilitätsforderung

$$0 \leq \lambda_i \;\leq\; \frac{h}{k}\,, \quad i = 1, \ldots, m\,. \tag{5.52}$$

Mit der selben Argumentation sieht man sofort ein, dass das Schema

$$\mathbf{U}_j^{n+1} \;=\; \mathbf{U}_j^n \;-\; \frac{k}{2h}\,\boldsymbol{A}\,(\mathbf{U}_{j+1}^n - \mathbf{U}_{j-1}^n)\,. \tag{5.53}$$

für beliebige Wahl von k und h instabil sein muss, denn der zugehörige Diffusionsoperator

$$\boldsymbol{D} \;=\; -\frac{1}{2}\,k\,\boldsymbol{A}^2 \tag{5.54}$$

*Eine Lösung mit $k/h < 1$ zeigt Abbildung 8.

*In Abbildung 7 erkennt man die negative Diffusion an der etwas größeren Amplitude.

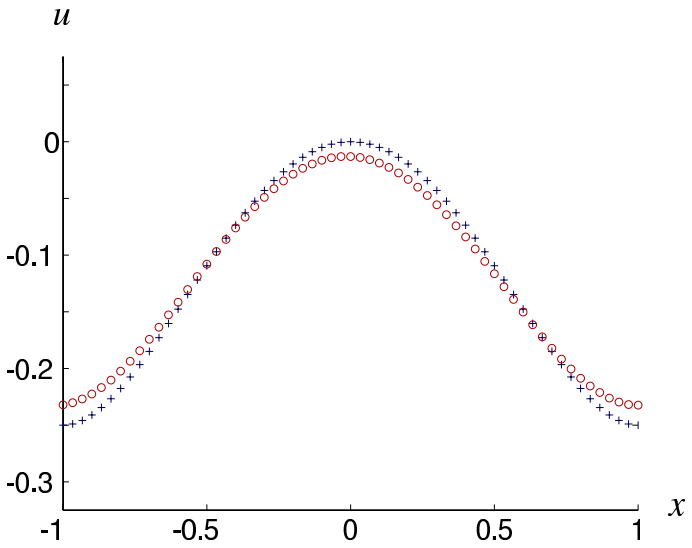

Abbildung 10: Upwind Diffusion an glatter Lösung

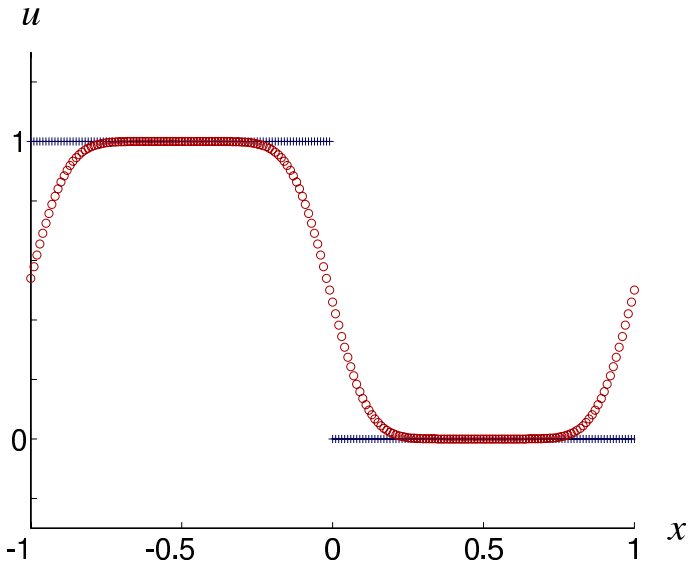

Abbildung 11: Upwind Diffusion an unstetiger Lösung

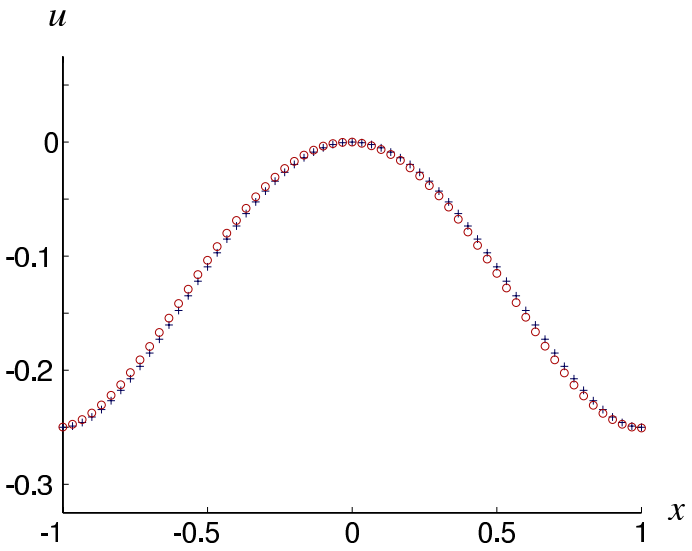

Abbildung 12: Lax-Wendroff Dispersion an glatter Lösung

ist in jedem Fall sogar negativ definit.

Ein ganz anderes Phänomen tritt bei *Verfahren zweiter Ordnung* auf. Wir betrachten dazu das Lax-Wendroff-Schema

$$\mathbf{U}_j^{n+1} \;=\; \mathbf{U}_j^n \;-\; \frac{k}{2h}\,\boldsymbol{A}\,(\mathbf{U}_{j+1}^n - \mathbf{U}_{j-1}^n) \;+\; \frac{k^2}{2h^2}\,\boldsymbol{A}^2\,(\mathbf{U}_{j+1}^n - 2\mathbf{U}_j^n + \mathbf{U}_{j-1}^n)\,. \tag{5.55}$$

Dieses ist eine Approximation dritter Ordnung zu der Gleichung

$$\mathbf{u}_t \,+\, \boldsymbol{A}\,\mathbf{u}_x \;=\; \frac{h^2}{6}\boldsymbol{A}\left(\frac{k^2}{h^2}\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{I}\right)\mathbf{u}_{xxx}\,, \tag{5.56}$$

was man auch in Abbildung 12 sehen kann: schon bei dem sehr groben Gitter (wiederum ist $k = 1/50$ und $h = 1/30$) ist der Fehler kaum noch zu sehen. Dadurch, dass der Fehlerterm nun dritter Ordnung ist, ist also auf sehr gute Approximation von glatten Lösungen zu hoffen.

Der anstelle des Diffusionstermes nun den Fehler dominierende *Dispersionsterm* hat für unstetige Lösungen allerdings äußerst unangenehme Eigenschaften. Mit Fourier-Analyse kann man nämlich zeigen, dass sich kurzwellige Anteile der Lösung von (5.56) um einiges schneller ausbreiten als langwellige*, und da Unstetigkeiten ein sehr breites Frequenzspektrum besitzen, erzeugt das Lax-Wendroff-Schema in deren Umgebung starke Oszillationen. Die Abbildung 13 zeigt diesen Fehler an unserem Modellbespiel für $k = 1/200, h = 1/100$ zum Zeitpunkt $T = 2$.

Dies ist ein zentrales Problem von Schemen höherer Ordnung.

6 Konservative Verfahren

6.1 Der Satz von Lax-Wendroff

Im linearen Fall haben wir gesehen, dass ein konsistentes und stabiles Schema automatisch gegen eine schwache Lösung des Erhaltungsgesetzes konvergiert. Im nichtlinearen Fall ist das

*Eine gute Einführung in Gruppengeschwindigkeiten bietet etwa [10].

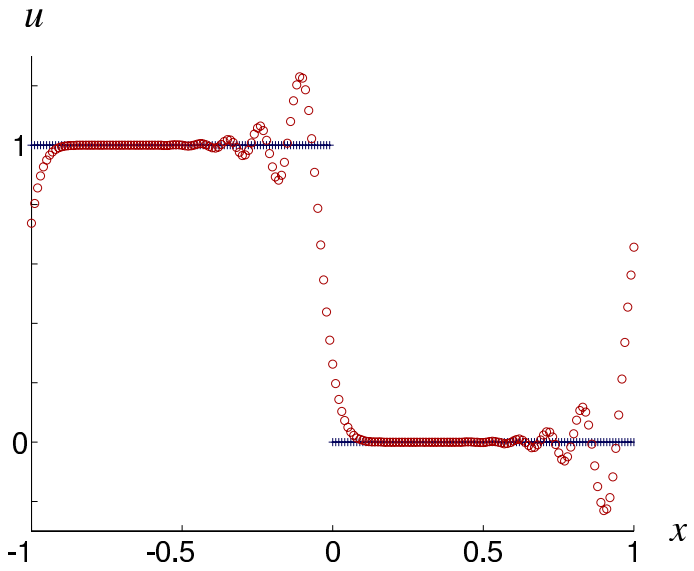

Abbildung 13: Lax-Wendroff Dispersion an unstetiger Lösung

leider nicht so einfach. Das folgende Beispiel zeigt, dass ein konsistentes Schema durchaus gegen eine Funktion konvergieren kann, die keine schwache Lösung des Erhaltungsgesetzes ist.

Beispiel 6.1. Eine „natürliche“ Diskretisierung der skalaren Burgers Gleichung ist

$$U_j^{n+1} = U_j^n - U_j^n \left(U_j^n - U_{j-1}^n\right). \tag{6.1}$$

Mit den Anfangsdaten

$$U_j^0 = \begin{cases} 1, & j < 0, \\ 0, & j \geq 0 \end{cases} \tag{6.2}$$

ist aber zwangsläufig $U_j^n = U_j^0$ für alle n und j, unabhängig von k und h. Für $k \to 0$ konvergiert das Schema also trivialerweise gegen $u(x,t) = u_0(x)$, was selbstverständlich keine schwache Lösung der Burgers Gleichung ist.

Bemerkung 6.1 (CIR-Verfahren). Das in Beispiel 6.1 vorgeschlagene Verfahren ist ein Spezialfall eines der ersten Upwind-Verfahren, die für nichtlineare Gleichungen der Gasdynamik vorgeschlagen wurden. Die Idee von Courant, Isaacson und Rees (CIR) war es, ausgehend vom Punkt (x_j, t_{n+1}) die Charakteristiken mit den genäherten Steigungen $\lambda_i(\mathbf{U}_j^n)$ mit der Zeitebene t_n zu schneiden und sodann den Wert $\mathbf{U}_j^{n+1}$ entsprechend aus den benachbarten Werten $\mathbf{U}_{j-1}^n$ und $\mathbf{U}_j^n$ bzw. $\mathbf{U}_j^n$ und $\mathbf{U}_{j+1}^n$ zu interpolieren.

Das CIR-Verfahren ist eine der vielen möglichen Verallgemeinerungen des Upwind-Konzeptes auf nichtlineare Gleichungen. In Beispiel 6.1 haben wir aber gesehen, dass diese Variante für unstetige Lösungen nicht geeignet ist. Grob gesagt, liegt dies in der Tatsache begründet, dass nicht die konservative, sondern die quasilineare Form der Gleichung diskretisiert wurde.

Letzteres kommt in dem folgenden, wichtigen *Designkriterium* für Differenzenschemen zum Ausdruck. Wie wir gleich sehen werden, verhindert dieses Kriterium auch tatsächlich die Konvergenz gegen Nicht-Lösungen.

Definition 6.1 (Konservatives Schema). Ein Differenzenschema, das die Form

$$\mathbf{U}_j^{n+1} \;=\; \mathbf{U}_j^n \;-\; \frac{k}{h}\Big[\mathbf{F}(\mathbf{U}_{j-p}^n,\dots,\mathbf{U}_{j+q}^n) \;-\; \mathbf{F}(\mathbf{U}_{j-p-1}^n,\dots,\mathbf{U}_{j+q-1}^n)\Big] \tag{6.3}$$

besitzt, heißt konservativ.

Bemerkung 6.2. Zur Vereinfachung führen wir folgende Notation ein:

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_n, j) \;=\; \mathbf{F}(\mathbf{U}_{j-p}^n,\dots,\mathbf{U}_{j+q}^n) \tag{6.4}$$

Bemerkung 6.3. Auf ein konservatives Schema kommt man i. a. dann, wenn man das Erhaltungsgesetz entweder in seiner Integralform (1.1) oder in seiner *konservativen Form* (1.13) diskretisiert.

Beispiel 6.2 (Lax-Friedrichs-Fluss). Das Lax-Friedrichs-Schema für eindimensionale, nichtlineare Systeme hat die Form

$$\mathbf{U}_j^{n+1} \;=\; \frac{1}{2}\left(\mathbf{U}_{j+1}^n + \mathbf{U}_{j-1}^n\right) \;-\; \frac{k}{2h}\left(\mathbf{f}(\mathbf{U}_{j+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_{j-1}^n)\right). \tag{6.5}$$

Dieses ist konservativ, denn es kann in der konservativen Form (6.3) geschrieben werden mit

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}) \;=\; \frac{h}{2k}(\mathbf{U}_j^n - \mathbf{U}_{j+1}^n) \;+\; \frac{1}{2}(\mathbf{f}(\mathbf{U}_j^n) + \mathbf{f}(\mathbf{U}_{j+1}^n)). \tag{6.6}$$

Beispiel 6.3 (Upwind-Fluss). Das nichtlineare Upwind-Verfahren besitzt die Form

$$\mathbf{U}_j^{n+1} \;=\; \mathbf{U}_j^n \;-\; \frac{k}{h}\left(\mathbf{f}(\mathbf{U}_j^n) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_{j-1}^n)\right). \tag{6.7}$$

Der zugehörige Fluss lautet

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}) \;=\; \mathbf{f}(\mathbf{U}_j). \tag{6.8}$$

Wir definieren nun den Begriff der Konsistenz neu:

Definition 6.2 (Konsistenz). Ein konservatives Schema heißt konsistent, wenn für jedes $\bar{\mathbf{u}}$

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{u}},\dots,\hat{\mathbf{u}}) \;=\; \mathbf{f}(\hat{\mathbf{u}}) \tag{6.9}$$

und wenn es darüber hinaus für jedes $\bar{\mathbf{u}}$ ein $K > 0$ gibt derart, dass

$$\left\| \mathbf{F}(\mathbf{U}_{j-p},\dots,\mathbf{U}_{j+q}) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}) \right\| \;\le\; K \max_{-p\le i\le q} \left\| \mathbf{U}_{j+i} - \bar{\mathbf{u}} \right\|. \tag{6.10}$$

Für die Einführung eines Konvergenzbegriffes für Differenzenschemen benötigen wir zunächst die folgende

Definition 6.3 (Totalvariation). Den Wert

$$TV(\mathbf{v}) \;=\; \limsup_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \left\| v(x) - v(x-\epsilon) \right\| dx \tag{6.11}$$

bezeichnet man als Totalvariation einer L^∞-Funktion $\mathbf{v}$.

Damit lautet unser Konvergenzbegriff:

Definition 6.4. Eine Folge von Lösungen $\mathbf{U}_i$ eines Differenzenschemas heißt konvergent gegen die Funktion $\mathbf{u}$, wenn für alle a, b und $T > 0$

$$\int_0^T \int_a^b \left\| \mathbf{U}_i(x,t) - \mathbf{u}(x,t) \right\| dx\, dt \;\to\; 0 \text{ für } i \to \infty \tag{6.12}$$

und es gleichzeitig ein $R > 0$ gibt derart, dass

$$TV\big(\mathbf{U}_i(\cdot,t)\big) \;<\; R \quad \text{für } \; 0 \le t \le T,\; i = 1, 2, \ldots \tag{6.13}$$

Der folgende Satz stellt nun sicher, dass ein im obigen Sinn konvergentes, konservatives und konsistentes Differenzenschema gegen die *physikalisch korrekte* schwache Lösung des Erhaltungsgesetzes konvergiert.

Satz 3 (Lax-Wendroff). *Sei $\{\mathbf{U}_i(x,t)\}$ eine Folge von Lösungen eines konservativen und konsistenten Differenzenschemas für das eindimensionale Erhaltungsgesetz, wobei $\Delta(x,t) \to 0$ für $i \to \infty$. Ferner konvergiere $\{\mathbf{U}_i(x,t)\}$ im Sinne von Definition 6.4 gegen eine Funktion $\mathbf{u}(x,t)$.*

Dann ist $\mathbf{u}(x,t)$ eine schwache Lösung des Erhaltungsgesetzes.

Beweis. Sei $\phi(x,t)$ eine C^1-Testfunktion auf kompaktem Träger. Multipliziert man das generische konservative Schema (6.3) mit $\phi(x_j, t_n)$ und summiert man über alle j und n, so erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi(x_j,t_n) \left(\mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n\right) \;&= \\ = \;\frac{k}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi(x_j,t_n) \left(\mathbf{F}(\mathbf{U}^n, j) - \mathbf{F}(\mathbf{U}^n, j-1)\right) &. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Da $\phi(x,t)$ kompakten Träger hat, erhält man durch partielle Summation (links nach n und rechts nach j) die Gleichung

$$\begin{aligned} -h \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi(x_j,t_0)\, \mathbf{U}_j^0 \;-\; kh \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} \big(\phi(x_j,t_n) - \phi(x_j,t_{n-1})\big)\, \mathbf{U}_j^n \;&= \\ = \;kh \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{h} \big(\phi(x_{j+1},t_n) - \phi(x_j,t_n)\big)\, \mathbf{F}(\mathbf{U}^n, j) &. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Die Summen in (6.15) sind natürlich in Wirklichkeit endliche Summen, da $\phi(x,t)$ kompakten Träger besitzt.

Der Grenzübergang $k, h \leftarrow 0$ auf der linken Seite führt n. V. genau auf das entsprechende Integral. Auf der rechten Seite bleibt noch ein wenig Arbeit. Die Lipschitz-Bedingung (6.10) an die Konsistenz und die Tatsache, dass $\mathbf{U}$ im Sinne von (6.13) konvergiert, führen aber letzten Endes* auf die Gleichung

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\phi_t(x,t)\, \mathbf{u} \,+\, \phi_x(x,t)\, \mathbf{f}_i(\mathbf{u})\Big)\, dx\, dt \;=\; -\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x,0)\, \mathbf{u}_0(x)\, dx \;, \tag{6.16}$$

*Dies ist der eigentlich kritische Punkt im Beweis, aber wir wollen uns die zahlreichen Abschätzungen, die dabei notwendig sind, an dieser Stelle ersparen ;-).

und diese ist genau die eindimensionale Entsprechung von (1.16).

Da wir diese Konstruktion mit beliebigen C^1-Funktionen $\phi(x,t)$ auf kompaktem Träger durchführen können, ist die Grenzfunktion $\mathbf{u}$ eine schwache Lösung.

□

Nach dem Satz von Lax-Wendroff kann ein konservatives, konsistentes Differenzenschema immer noch gegen eine schwache Lösung konvergieren, die keiner Entropiebedingung genügt. Dafür wird noch ein weiteres Designkriterium benötigt. Ein solches folgt aus einem Korollar zum Beweis von Satz 3:

Korollar 6.5 (Lax-Wendroff). *Seien $\eta(\mathbf{u})$ und $\psi(\mathbf{u})$ Entropiefunktion und Entropiefluss nach Definition 1.3. Ferner sei Ψ eine mit dem Entropiefluss ψ im Sinne der Definition 6.2 konsistente numerische Flussfunktion.*

Wenn dann unter den Voraussetzungen von Satz 3 zusätzlich gilt, dass

$$\eta(\mathbf{U}_j^{n+1}) \;\leq\; \eta(\mathbf{U}_j^n) \;-\; \frac{k}{h}\Big(\Psi(\mathbf{U}^n, j) - \Psi(\mathbf{U}^n, j-1)\Big)\,, \tag{6.17}$$

dann genügt $\mathbf{u}(x,t)$ der Entropiebedingung (1.26).

Beweis. Analog zum Beweis von Satz 3, nur dass anstelle des generischen Differenzenschemas die Gleichung (6.17) mit $\phi(x_j, t_n)$ multipliziert wird etc.

□

6.2 Das klassische Godunov-Verfahren

Anstatt wie in der CIR-Methode Charakteristiken in die Vergangenheit zu verfolgen, verfolgte Godunov die Idee, die Zukunft als Lösung von Riemannproblemen zu rekonstruieren.

Zum Zeitpunkt t_n lautet das Erhaltungsgesetz auf der Zelle $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ folgendermaßen:

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \big(\mathbf{u}(\xi, t_{n+1}) - \mathbf{u}(\xi, t_n)\big)\, d\xi \;+ \\ + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Big(\mathbf{f}\big(\mathbf{u}(x_{j+1/2}, \tau)\big) - \mathbf{f}\big(\mathbf{u}(x_{j-1/2}, \tau)\big)\Big)\, d\tau \;=\; \mathbf{0}\,. \tag{6.18}$$

Wir setzen nun

$$\mathbf{u}(\xi, t_n) \;\equiv\; \mathbf{U}_j^n\,, \tag{6.19}$$

$$\mathbf{U}_j^{n+1} \;=\; \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbf{u}(\xi, t_{n+1})\, d\xi\,, \tag{6.20}$$

und wir tragen der Tatsache Rechnung, dass die Lösung des Erhaltungsgesetzes selbstähnlich ist, womit $\mathbf{u}(\boldsymbol{x}_{j+1/2}, \tau)$ die Lösung $\mathbf{u}^*_{n,\,j+1/2}$ des Riemann-Problems mit Anfangsbedingungen

$$\mathbf{u}(\xi, t_n) \;=\; \begin{cases} \mathbf{U}_j^n\,, & \xi < x_{j+1/2}\,, \\ \mathbf{U}_{j+1}^n\,, & \xi > x_{j+1/2} \end{cases} \tag{6.21}$$

entlang der Geraden $\xi = x_{j+1/2}$ ist.

Allerdings muss der Zeitschritt klein genug gewählt werden, damit die benachbarten Riemannprobleme nicht interagieren. Es genügt dafür die Forderung

$$\left| \frac{k}{h} \lambda_i \Big(\mathbf{f}'(\mathbf{U}_j^n) \Big) \right| \;\leq\; 1 \tag{6.22}$$

für alle Eigenwerte λ_i aller Matrizen $\mathbf{f}'(\mathbf{U}_j^n)$ (dies ist die natürliche Verallgemeinerung der CFL-Bedingung für nichtlineare Probleme).

Damit erhalten wir die Vorschrift

$$\mathbf{U}_j^{n+1} \;=\; \mathbf{U}_j^n \;-\; \frac{k}{h} \Big(\mathbf{f}(\mathbf{u}^*_{n,\,j+1/2}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}^*_{n,\,j-1/2}) \Big) \,. \tag{6.23}$$

Upwind-Konzepte dieser Form nennt man *klassische Godunov-Verfahren*. Sie unterscheiden sich untereinander durch die Art und Weise, wie die Lösungen $\mathbf{u}^*_{n,\,j+1/2}$ der einzelnen nichtlinearen Riemann-Probleme bestimmt werden.

Man sieht sofort, dass Godunov-Verfahren konsistent sind. Außerdem sind sie konservativ mit der numerischen Flussfunktion

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_j^{n+1}) \;=\; \mathbf{f}(\mathbf{u}^*_{n,\,j+1/2}) \,. \tag{6.24}$$

Damit liefern klassische Godunov-Methoden im Falle ihrer Konvergenz (im Sinne der Voraussetzungen des Satzes von Lax-Wendroff) schwache Lösungen.

Es bleibt die Frage der Entropiebedingung. Das folgende Lemma stellt fest, dass diese im Falle von exakten Riemann-Lösungen eingehalten wird.

Lemma 6.6. *Ein klassisches Godunov-Schema liefert im Falle der Konvergenz nach den Voraussetzungen des Satzes von Lax-Wendroff schwache Lösungen, die einer Entropiebedingung genügen, wenn nur die einzelnen Riemann-Probleme unter Einhaltung der Entropiebedingung gelöst werden.*

Beweis. Aufgrund der Voraussetzung genügt die auf den einzelnen Intervallen $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ konstante Funktion $\tilde{\mathbf{u}}(x, t_n)$ für Entropiefunktionen η und ψ der Bedingung (1.26). Damit ist

$$\frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \eta\big(\tilde{\mathbf{u}}(x, t_{n+1})\big)\, dx \;\leq\; \eta(\mathbf{U}_j^n) \;-\; \frac{k}{h} \Big(\Psi(\mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n) - \Psi(\mathbf{U}_{j-1}, \mathbf{U}_j) \Big) \tag{6.25}$$

mit

$$\Psi(\mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n) \;=\; \psi\big(\mathbf{u}^*(\mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n)\big) \,. \tag{6.26}$$

Da aber η konvex ist, gilt die *Jensen-Ungleichung*

$$\eta\Big(\frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{\mathbf{u}}(x, t_{n+1})\, dx \Big) \;\leq\; \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \eta\big(\tilde{\mathbf{u}}(x, t_{n+1})\big)\, dx \,. \tag{6.27}$$

Im Argument der rechten Seite steht aber gerade $\mathbf{U}_j^{n+1}$, womit das Schema einer diskreten Entropiebedingung genügt. Damit sind alle Voraussetzungen von Korollar 6.5 erfüllt. □

Mit Einhaltung der Entropiebedingung bei der Lösung des Riemannproblems beschäftigen wir uns im folgenden Abschnitt.

Bemerkung 6.4. Im linearen Fall sind zur Lösung des Riemann-Problems nur ein einziges Mal Eigenwerte und Eigenvektoren der Systemmatrix $\boldsymbol{A}$ zu bestimmen. Dann können die Werte $\mathbf{u}^*_{n,\,j+1/2}$ einfach aus Gleichung (3.10) bestimmt werden. Wir erhalten die Flussfunktion

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}^n_j, \mathbf{U}^n_{j+1}) \;=\; \frac{1}{2}\boldsymbol{A}(\mathbf{U}^n_{j+1} + \mathbf{U}^n_j) \;-\; \frac{1}{2}|\boldsymbol{A}|(\mathbf{U}^n_{j+1} - \mathbf{U}^n_j)\,, \tag{6.28}$$

wobei

$$|\boldsymbol{A}| \;=\; \boldsymbol{Q}|\boldsymbol{\Lambda}|\boldsymbol{Q}^{-1}\,, \qquad |\boldsymbol{\Lambda}| \;=\; \mathrm{diag}(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_m|)\,. \tag{6.29}$$

Das resultierende Schema kann man auch schreiben als

$$\mathbf{U}^{n+1}_j \;=\; \mathbf{U}^n_j \;-\; \frac{k}{2h}\,\boldsymbol{A}\,(\mathbf{U}^n_{j+1} - \mathbf{U}^n_{j-1}) \;+\; \frac{k}{2h}\,|\boldsymbol{A}|\,(\mathbf{U}^n_{j+1} - 2\mathbf{U}^n_j + \mathbf{U}^n_{j-1})\,, \tag{6.30}$$

sodass die ersten beiden Terme genau das instabile Schema (5.53) ergeben. Der zusätzliche dissipative Term am Ende wirkt stabilisierend, da die Diffusionsmatrix $|\boldsymbol{A}|$ nichtnegative Eigenwerte besitzt. Dieses Schema wird auch *Verallgemeinertes Upwind-Verfahren* genannt. Es ist ferner genau die Reduktion der CIR-Idee (siehe Bemerkung 6.1) auf lineare Gleichungen.

6.3 Approximative Riemannlöser

Im skalaren Fall kann die Entropie-Lösung der einzelnen Riemannprobleme einfach durch Fallunterscheidung herausgefunden werden. Es ergibt sich die numerische Flussfunktion

$$F(u_-, u_+) \;=\; \begin{cases} \min_{u_- \le u \le u_+} f(u)\,, & \text{wenn } u_- \le u_+\,, \\ \max_{u_+ \le u \le u_-} f(u)\,, & \text{wenn } u_- > u_+\,. \end{cases} \tag{6.31}$$

Wenn also die Extremstelle von f am Rand liegt, ist die numerische Flussfunktion gleich u_- oder u_+. Ansonsten ist ist sie eine Lösung der nichtlinearen Gleichung $f'(u^*) = 0$.

Dies verursacht zumindest im mehrdimensionalen Fall einen recht hohen Aufwand, da unter Umständen an jedem einzelnen Knoten ein großes, nichtlineares Gleichungssystem zu lösen ist. Deswegen sucht man nach Möglichkeiten der Approximation.

Eine sehr bekannte Methode ist das *Roe-Matrix* Verfahren. Die Idee ist dabei, ein verwandtes lineares Problem zu suchen, was sich dann ja leicht durch Eigenvektorzerlegung lösen lässt. Diese Matrix $\mathcal{A}$ sollte nach Roe folgende Eigenschaften haben:

- $\mathcal{A}(\mathbf{u}_-, \mathbf{u}_+)(\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-)\,,$
- $\mathcal{A}(\mathbf{u}_-, \mathbf{u}_+)$ ist diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten und
- $\mathcal{A}(\mathbf{u}_-, \mathbf{u}_+) \to \mathbf{f}'(\hat{\mathbf{u}})$, wenn $\mathbf{u}_-, \mathbf{u}_+ \to \hat{\mathbf{u}}\,.$

Die erste Bedingung wird benötigt, um sicherzustellen, dass das Verfahren konservativ bleibt. Die zweite ist klarerweise zwingend, denn sonst wäre das Ersatzproblem nicht lösbar, und die dritte garantiert, dass sich die Methode für glatte Lösungen gut verhält.

Die resultierende numerische Flussfunktion lautet dann

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}_-, \mathbf{u}_+) \;=\; \frac{1}{2}(\mathbf{f}(\mathbf{u}_-) + \mathbf{f}(\mathbf{u}_+)) \;-\; |\mathcal{A}|(\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_-)\,, \tag{6.32}$$

was an den Godunov-Fluss (6.28) für ein lineares System erinnert.

Natürlich lässt das modifizierte Problem keine Verdünnungsfächer zu (siehe etwa die Bemerkungen zu Gleichung (3.18)), weswegen es zu entropieverletzenden Lösungen führen kann. Aus diesem Grund benötigt man noch Verbesserungen dieser Methode. Eine solche Verbesserung (nach Harten und Hyman) findet man etwa in [5].

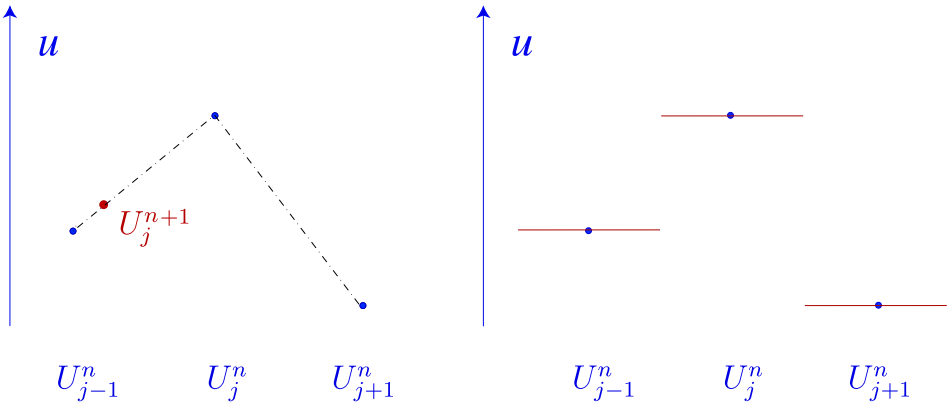

Abbildung 14: Zwei Sichtweisen für das Upwind-Verfahren

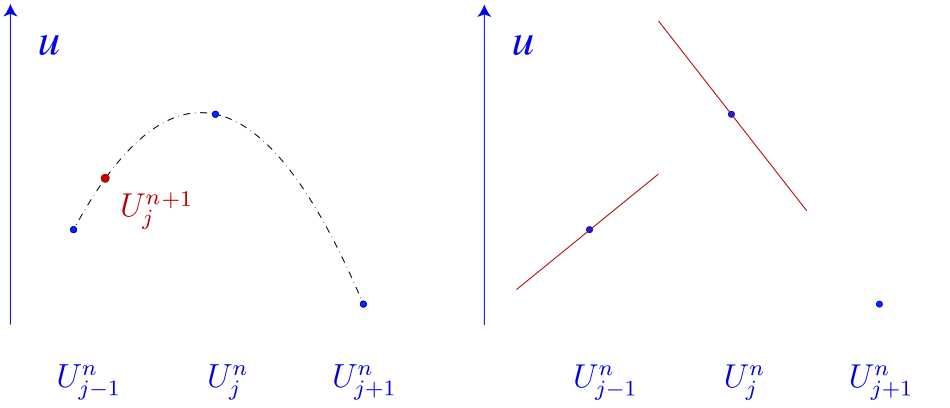

Abbildung 15: Zwei Sichtweisen für das Lax-Wendroff-Verfahren

6.4 Schemen erster und zweiter Ordnung

Wir haben gesehen, dass Godunov-Verfahren auf der Idee basieren, dass die Lösung durch eine stückweise konstante Funktion repräsentiert wird, wonach lokale Riemann-Probleme zu lösen sind. Im linearen Fall entsteht auf diese Weise ein verallgemeinertes Upwind-Verfahren.

Letzteres kann man aber auch auf eine andere Weise konstruieren. Man repräsentiert dazu die Funktion in der Zeitebene t_n durch eine *zwischen den Zellenmittelpunkten* stückweise lineare Interpolierte $\hat{\mathbf{u}}$ und setzt, wie in Abbildung 14 zu sehen, für die Komponenten der transformierten Funktion $\mathbf{v} = \boldsymbol{Q}^{-1}\mathbf{u}$

$$V_{i,j}^{n+1} = v_i(x - \lambda_i(t^{n+1} - t^n), t^n) = \begin{cases} V_{i,j}^n - \lambda\frac{k}{h}(V_{i,j}^n - V_{i,j-1}^n) & \text{für } \lambda_i > 0\,, \\ V_{i,j}^n - \lambda\frac{k}{h}(V_{i,j+1}^n - V_{i,j}^n) & \text{für } \lambda_i < 0\,. \end{cases} \tag{6.33}$$

Ein Verfahren höherer Ordnung konstruiert man, indem man entweder auf dem 3-Punkte-Stern quadratisch interpoliert, oder indem man die Godunov-Idee auf eine stückweise lineare Repräsentation der Zellen anwendet. In Abbildung 15 sieht man diese Idee am Beispiel des skalaren und linearen Lax-Wendroff-Verfahrens (5.55) für $a > 0$ dargestellt.

Die quadratische Interpolation auf dem 3-Punkte-Stern U_{j-1}^n, U_j^n, U_{j+1}^n sieht folgenderma-

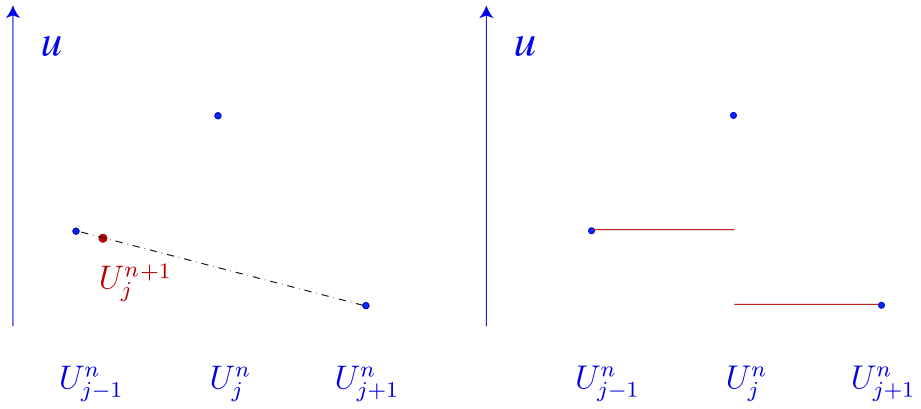

Abbildung 16: Zwei Sichtweisen für das Lax-Friedrichs-Verfahren

ßen aus:

$$\begin{aligned}\hat{u}\big(\,x-a(t^{n+1}-t^n)\,,\,t^n\,\big) \;=\; \frac{1}{2h^2}\Big(&-ak\,(h-ak)\,U_{j+1}^n\;+\\ &+\,2\,(h-ak)(h+ak)\,U_j^n\;+\\ &+\,ak\,(h+ak)\,U_{j-1}^n\Big)\,.\end{aligned}\tag{6.34}$$

In der zweiten Sichtweise wird die Lösung im n-ten Zeitschritt stückweise linear repräsentiert.

$$\begin{aligned}U_j^{n+1} \;=\; U_j^n + \frac{a}{h}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\Big[\frac{1}{2}(U_{j+1}^n+U_j^n)-a\tau\frac{U_{j+1}^n-U_j^n}{h}\Big]\,d\tau\;-\\ -\;\frac{a}{h}\int_{t_n}^{t_{n+1}}\Big[\frac{1}{2}(U_j^n+U_{j-1}^n)-a\tau\frac{U_j^n-U_{j-1}^n}{h}\Big]\,d\tau\,.\end{aligned}\tag{6.35}$$

Wie erwähnt, ist diese zweite Sichtweise mit der klassischen Godunov-Idee verwandt, nur dass statt stückweise konstanter Repräsentanten stückweise lineare verwendet werden. Dies bildet aber nun den Ansatzpunkt für Verfahren höherer Ordnung auch für nichtlineare Systeme.

Die beiden Konzepte, die in diesem Abschnitt gezeigt wurden, sind *Upwind-Verfahren*. Das bedeutet, dass vor dem Aufstellen des Schemas erst festgestellt wird, *woher* die Information eigentlich kommt, womit man überflüssige Diffusion vermeidet.

Im linearen Fall ist das ganz unbestritten eine sehr praktikable Idee, denn schließlich muss man nur ein einziges Mal die Eigenvektoren der Systemmatrix $\boldsymbol{A}$ bestimmen, und man kann dann diese Information immer wieder verwenden. Im nichtlinearen Fall ist dagegen die Informationsrichtung immer wieder neu zu bestimmen, und das Lösen der Riemannprobleme ist mit sehr hohem Aufwand verbunden und nicht immer ganz unproblematisch.

Wenn man diesen Schwierigkeiten aus dem Weg gehen will, dann wählt man besser *Zentrale Differenzen*. In Abbildung 16 rechts sieht man am Beispiel des Lax-Friedrichs-Verfahrens, dass bei einem solchen Konzept in jeder Zelle $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ über einen kompletten Riemann-Fächer integriert wird (wenn der Zeitschritt klein genug ist). Ein Riemann-Löser wird also nicht benötigt.

Der Preis ist natürlich eine signifikant höhere numerische Viskosität, aber auch dieses Konzept kann man auf höhere Ordnung bringen, indem man die stückweise konstante Repräsentation durch eine stückweise lineare ersetzt (siehe etwa [6]).

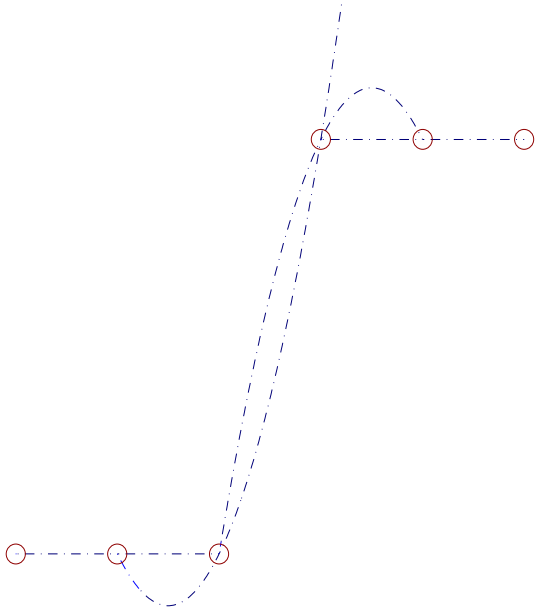

Abbildung 17: Entstehung von Oszillationen

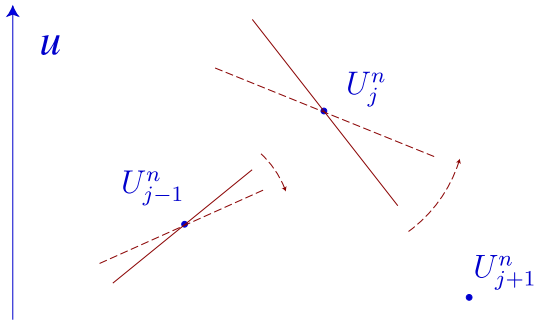

Abbildung 18: Slope limiter

6.5 Hybride Schemen

Wir haben gesehen, dass Verfahren höherer Ordnung an glatten Lösungen sehr genau arbeiten (siehe Abbildung 12), bei Unstetigkeiten aber an den unangenehmen Eigenschaften des Dispersionstermes leiden, der durch die höhere Ordnung entsteht und zu Oszillationen führt (siehe Abbildung 17 oder auch Abbildung 13).

Wir hätten also gerne ein Verfahren höherer Ordnung, welches an den Unstetigkeiten vielleicht gerade so viel Diffusion einstreut, dass die Oszillationen verschwinden.

Eine naheliegende Idee eines Kompromisses zeigt die Abbildung 18. Verfahren, die auf dieser Idee beruhen, nennt man *Slope-limiter-Verfahren*.

Eine weitere Idee ist, mehrere numerische Flussfunktionen einzusetzen. Um dispersive Effekte zu vermeiden, wird man sich wünschen, dass an Unstetigkeiten ein Fluss von niedrigerer Approximationsordnung zum Einsatz kommt, wohingegen man überall sonst gerne hohe Genauigkeit hätte. Hybride Strategien dieser Art nennt man *Flux-limiter-Verfahren*.

Ein ähnlicher Gedanke liegt den *(W)ENO-Verfahren* (*weighted* essentially non-oscillatory schemes) zugrunde. Hiebei wird versucht, zu vermeiden, dass der Approximationsstern sich über eine Unstetigkeit erstreckt. Eine gute Einführung in solche Methoden ist etwa [8].

Wieder ein anderer Weg, Verfahren von höherer Ordnung zu stabilisieren, ist der gezielte Einsatz von *künstlicher Viskosität*. Zu dieser Verfahrensklasse zählen unter anderem auch Stabilisierungstechniken für Galerkin-Verfahren (wurden in dieser Vorlesung nicht behandelt) wie etwa *Stromliniendiffusion* (siehe z. B. [4], pp. 117ff).

Schließlich sollten noch die *Linienmethoden* erwähnt werden. Dies ist vor allem dann interessant, wenn Genauigkeit von höherer Ordnung als 2 angestrebt wird. Man definiert zu diesem Zweck zunächst Fluss-Approximationen von höherer Ordnung an den Zellübergängen, womit man eine Vielzahl von ODEs in Zeitrichtung erhält. Diese Methoden heißen deswegen auch *semi-diskret*. Natürlich müssen die ODEs erst noch integriert werden, aber die Ordnung dieser Integration kann frei gewählt werden, unabhängig von der räumlichen Diskretisierung.

7 Konvergenz skalarer Verfahren

7.1 TV-Stabilität

Wie erwähnt, ist der im Abschnitt über lineare Methoden erwähnte *Äquivalenzsatz von Lax* nicht auf nichtlineare Methoden übertragbar.

Der *Satz von Lax-Wendroff* liefert ein Designkriterium, welches verhindert, dass ein Differenzenschema gegen eine Funktion konvergiert, die keine schwache Lösung des Erhaltungsgesetzes ist. Das zugehörige Korollar garantiert zudem, dass Schemen, die das diskrete Entropiekriterium (6.17) erfüllen, nur gegen physikalisch korrekte Lösungen konvergieren können. Es fehlt aber noch ein Kriterium, welches die Konvergenz selbst garantiert.

Überraschenderweise wurde bis zum heutigen Tag noch kein einziges numerisches Verfahren gefunden, dessen Konvergenz man allgemein für eindimensionale Systeme von nichtlinearen Gleichungen mit beliebigen Anfangswerten beweisen könnte. Lediglich für bestimmte Problemklassen gibt es Verfahren, für die man den Konvergenzbeweis führen kann.

In diesem Abschnitt wird eine Stabilitätseigenschaft für skalare Verfahren vorgestellt, die den meisten in der Praxis verwendeten Verfahren zu eigen ist.

Definition 7.1 (TV-Stabilität). Ein skalares, eindimensionales Differenzenschema heißt TV-stabil, wenn es positive Konstante K, R, T und $M > 0$ gibt derart, dass die stückweise konstante numerische Approximationsfunktion $U_k(x,t)$ für alle Zeitschrittlängen $k < K$ die folgenden Eigenschaften besitzt:

a) $\int_0^T TV(U(\cdot,t))\,dt \;+\; \int_{-\infty}^{\infty} TV(U(x,\cdot))\,dx \;<\; R$;

b) $U_k(x,t)$ verschwindet für alle $t < T$ außerhalb von $[-M,M]$.

Die erste dieser Eigenschaften ist in jedem Fall erfüllt, wenn k/h für $k \to 0$ konstant ist und die Anfangsdaten kompakten Träger haben. Beides wollen wir in der folgenden Diskussion voraussetzen.

Die zweite Eigenschaft kann man im Fall von konservativen Schemen (und nur dieser interessiert uns) abschwächen zu der Forderung, dass die eindimensionale Totalvariation zu jedem Zeitpunkt t_n gleichmäßig (unabhängig von n) beschränkt ist:

Lemma 7.2. *Ein konservatives, skalares 1D-Schema mit konstanten Schrittweiten und Lipschitz-stetigem numerischen Fluss, für das es für alle Anfangsdaten u_0 mit kompaktem Träger*

ein k_0 und ein $R > 0$ gibt mit der Eigenschaft, dass

$$TV(U_k) \;\leq\; R \qquad \forall\, n,k \text{ mit } k < k_0\,,\; nk \leq T\,, \tag{7.1}$$

ist TV-stabil.

Beweis. Wie bereits erwähnt, folgt die erste Eigenschaft der TV-Stabilität (kompakter Träger) bei konstanten Schrittweiten aus unserer Annahme, dass die Anfangsdaten kompakten Träger besitzen. Der "räumliche" Anteil der Totalvariation ist aufgrund der Annahme (7.1) klarerweise beschränkt, denn

$$\int_0^T TV(U^n(\cdot,t))\,dt \;=\; \sum_{n=1}^{T/k} k\,TV(U^n) \;\leq\; RT\,. \tag{7.2}$$

Es fehlt also nur eine Schranke für die zeitliche Variation. Dazu halten wir zunächst fest, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} TV(U(x,\cdot))\,dx \;=\; \sum_{n=1}^{T/k} \|U^{n+1} - U^n\|_1\,. \tag{7.3}$$

Da wir n. V. ein konservatives Schema mit konstanten Schrittlängen vorliegen haben, ist

$$\|U^{n+1} - U^n\|_1 \;=\; k \sum_{j=-\infty}^{\infty} |F(U^n,j) - F(U^n,j-1)|\,. \tag{7.4}$$

Die numerischen Flüsse $F(U,j)$ hängen von einer endlichen Zahl von Werten U_j ab. Aus der gleichmäßigen Beschränkung (7.1) der Totalvariation folgt nun auch die gleichmäßige Beschränkung von $|U_j^n|$, was uns mit der Lipschitz-Stetigkeit von F zu einer Schranke

$$|F(U^n,j) - F(U^n,j-1)| \;\leq\; K \max_{-p\leq i\leq q} |U^n_{j+i} - U^n_{j+i-1}| \leq\; K \sum_{i=-p}^{q} |U^n_{j+i} - U^n_{j+i-1}| \tag{7.5}$$

führt, wobei p und q die linke und rechte Breite des Sternes des numerischen Flusses F markieren. Mit (7.4) erhält man

$$\|U^{j+1} - U^j\|_1 \;\leq\; kK \sum_{i=-p}^{q} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |U^n_{j+i} - U^n_{j+i-1}| \;=\; kK \sum_{i=-p}^{q} TV(U^n) \;\leq\; kK(p+q+1)R\,. \tag{7.6}$$

Mit (7.3) erhalten wir die gewünschte Schranke für die zeitliche Totalvariation als

$$\int_{-\infty}^{\infty} TV(U^n(x,\cdot))\,dx \;\leq\; K(p+q+1)RT\,. \tag{7.7}$$

□

Da die Menge der TV-stabilen L_1-Funktionen eine kompakte Menge ist, besitzt jede Folge U_k von Lösungen eines eindimensionalen, skalaren Differenzenschemas, das die Voraussetzungen von Lemma 7.2 für $k \to 0$ erfüllt, eine konvergente Teilfolge. Aufgrund des Satzes von Lax-Wendroff müssen aber alle konvergenten Teilfolgen schwache Lösungen liefern. Wenn man nun noch auf die Einhaltung der diskreten Entropiebedingung (6.17) achtet, genügen diese nach Korollar 6.5 auch der kontinuierlichen Entropiebedingung (1.26). Falls die Entropielösung eindeutig ist, ist in diesem Fall sogar die Konvergenz des Differenzenschemas garantiert.

7.2 Stabilitätskriterien

In diesem Abschnitt werden einige Designkriterien für skalare Differenzenschemen vorgestellt, welche aus der Theorie für skalare Gleichungen motiviert sind. Das am wenigsten restriktive Kriterium, das wir hier vorstellen, ist die Erhaltung der Monotonie von Anfangsdaten:

Definition 7.3 (Monotonie-Erhaltung). Ein skalares, eindimensionales Differenzenschema, das für monotone Anfangsdaten in jedem Zeitschritt monotone Lösungen erzeugt, heißt monotonie-erhaltend.

Das nächste Kriterium schränkt den Lösungsraum schon ein wenig mehr ein:

Definition 7.4 (TVD). Ein skalares, eindimensionales Differenzenschema heißt TVD (total variation diminishing), wenn

$$TV(U^{n+1}) \leq TV(U^n) \tag{7.8}$$

für alle Gitterfunktionen U^n.

Lemma 7.5. *Jedes TVD-Schema ist monotonie-erhaltend.*

Beweis. Wenn monotone Anfangsdaten vorliegen, dann muss $TV(U^0)$ gleich $\|U^0_{-\infty} - U^0_{\infty}\|$ sein. Aufgrund der TVD-Eigenschaft kann diese Totalvariation nicht wachsen, also $TV(U^n) \leq \|U^0_{-\infty} - U^0_{\infty}\|$.

Da andererseits jeder Zeitschritt einen endlichen Abhängigkeitsbereich hat, muss $U^n_j \to U^0_{\pm\infty}$ für alle n. Falls nun U^n nicht monoton wäre, müsste $TV(U^n) > \|U^0_{-\infty} - U^0_{\infty}\|$ sein, was wir oben ausgeschlossen haben.

□

Definition 7.6 (l_1-Kontraktion). Ein skalares, eindimensionales Differenzenschema $\mathcal{T}$ heißt l_1-kontrahierend, wenn für zwei beliebige Gitterfunktionen U^n und V^n, deren Differenz $U^n - V^n$ kompakten Träger hat, die folgende Ungleichung gilt:

$$\|\mathcal{T}(U^n) - \mathcal{T}(V^n)\|_1 \leq \|U^n - V^n\|_1 . \tag{7.9}$$

Lemma 7.7. *Jedes l_1-kontrahierende Schema ist TVD.*

Beweis. Wir nehmen an, dass die Anfangsbedingungen von U und V nur um einen Gitterpunkt verschoben ist. Da die Differenzenschemen translationsinvariant sind, bleibt diese Verschiebung im Lauf des Verfahrens aufrecht. Klarerweise gilt dann

$$TV(U^{n+1}) = \frac{1}{h}\|U^{n+1} - V^{n+1}\|_1 \leq \frac{1}{h}\|U^n - V^n\|_1 = TV(U^{n+1}) .$$

□

Definition 7.8 (Monotonie). Ein skalares, eindimensionales Differenzenschema heißt monoton, falls für zwei Gitterfunktionen U_n und V_n gilt, dass

$$V^n_j \leq U^n_j \Rightarrow V^{n+1}_j \leq U^{n+1}_j . \tag{7.10}$$

Lemma 7.9. *Jedes monotone Schema ist l_1-kontrahierend.*

Beweis. Siehe [1].

□

Dieses Kriterium ist also das strengste von allen. In der Tat schränkt es die Möglichkeiten ziemlich ein:

Lemma 7.10. *Jedes monotone Schema ist höchstens von erster Ordnung.*

Beweis. Siehe [3].

□

Trotzdem sind ist dieses Kriterium sehr populär, weil es zum einen sehr einfach zu überprüfen ist und zum anderen ohne weitere Zusatzkriterien Lösungen liefert, die der Entropiebedingung genügen:

Lemma 7.11. *Eine mittels eines konsistenten, monotonen Differenzenschemas erzeugte Lösung mit fixiertem Quotienten k/h konvergiert für $k \to 0$ gegen eine Entropielösung.*

Beweis. Siehe [1] oder [3].

□

Schlussbemerkungen

In dieser Vorlesung wurden einige Eigenschaften einer für die Praxis wichtigen Klasse von eindimensionalen hyperbolischen PDEs andiskutiert, welche für deren numerische Behandlung von zentraler Bedeutung sind. Nicht behandelt wurde allerdings die Problematik von *Randbedingungen*, da dies den Rahmen eindeutig gesprengt hätte.

Die behandelten Eigenschaften führten uns zu dem Designkriterium „Konservativität“, und beispielhaft wurden einige Verfahren benannt, welche diesem genügen.

Ausführlich wurde das Problem der numerischen Dispersion diskutiert, welche bei der Approximation der Unstetigkeiten durch Verfahren höherer Ordnung entsteht, und es wurden einige Konzepte zu deren Vermeidung benannt.

Numerische Methoden für *mehrdimensionale Gleichungen* blieben in dieser Vorlesung ausgeklammert, aber viele der gezeigten Konzepte können unmittelbar auf mehrdimensionale Gleichungen übertragen werden. Aus diesem Grund wurden auch keine Verfahren diskutiert, welche explizit die Unstetigkeiten verfolgen und diese extra behandeln, denn solche Konzepte sind für mehrdimensionale Gleichungen kaum in praktikabler Weise zu verallgemeinern.

Es gibt sogar eine Verfahrensklasse für mehrdimensionale Gleichungen, welche direkt eindimensionale Verfahren verwendet. Solche „dimensional splitting“ Konzepte sind aber im nichtlinearen Fall um einiges komplizierter als im linearen, der ja in der Vorlesung auch diskutiert wurde.

Daneben gibt es noch eine Reihe anderer Verfahrensklassen, wobei vor allem *Finite Volumenmethoden*, *Unstetige Galerkinverfahren* und *Stromliniendiffusionsverfahren* eine wichtige Rolle spielen. Erstere diskretisieren das integrale Erhaltungsgesetz (1.1) und sind daher eine natürliche Verallgemeinerung der in dieser Vorlesung diskutierten Methoden. Letztere attackieren die schwache Formulierung (1.16) und haben auch ihre eindimensionale Entsprechung, welche aber ebenfalls keine Aufnahme in diese Vorlesung finden konnte. Natürlich gibt es auch im mehrdimensionalen Fall *Linienmethoden*, d. h. die Entkoppelung der Diskretisierungen von Zeit und Raum.

In jedem Fall ist es im mehrdimensionalen Fall sehr schwierig, praktikable Stabilitätskriterien zu finden. So besagt etwa ein bekanntes Resultat von Goodman und LeVeque, dass mit Ausnahme von trivialen Fällen jede Methode, die in zwei Dimensionen TVD ist, höchstens von erster Ordnung sein kann.

Weiterführendes auf fast allen Gebieten bieten etwa [2] und [4].

Literatur

[1] M. G. Crandall and A. Majda, *Monotone difference approximations for scalar conservation laws*, Math. Comp., 34 (1980), pp. 1–21.

[2] E. Godlewski and P. A. Raviart, *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, no. 118 in Applied Mathematical Sciences, Springer Verlag, 1992.

[3] A. Harten, J. M. Hyman, and P. D. Lax, *On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks*, Comm. Pure Appl. Math., 29 (1976), pp. 297–322. with appendix by Barbara Keyfitz.

[4] D. Kröner, *Numerical Schemes for Conservation Laws*, Wiley and Teubner, 1997.

[5] R. J. LeVeque, *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhäuser Verlag, 2nd ed., 1992.

[6] H. Nessyahu and E. Tadmor, *Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws*, Journal of Computational Physics, 87 (1990), pp. 408–463.

[7] R. D. Richtmyer and K. W. Morton, *Difference Methods for Initial-value Problems*, Wiley-Interscience, 1967.

[8] C.-W. Shu, *Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws*, Tech. Rep. CR-97-206253, Brown University, NASA, 1997.

[9] J. C. Strikwerda, *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, Wadsworth & Brooks/Cole, 1989.

[10] N. Trefethen, *Group velocity in finite difference schemes*, SIAM Review, 24 (1982), pp. 113–136.