Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

Sommersemester 2000

1. Übungsblatt zur Vorlesung "Theorie und Numerik hyperbolischer Erhaltungsgleichungen"

(Eindimensionale, skalare Erhaltungsgleichungen: Cauchyproblem, Charakteristiken)

1. Aufgabe:

Gegeben sei die lineare Advektionsgleichung

$$u_t + a u_x = 0, \qquad u|_{t=0} = u_0, \tag{1}$$

mit der Konstanten a und der integrierbaren Anfangsverteilung u_0. Überprüfen Sie, daß die Funktion $u(x,t) = u_0(x - at)$ die Integralform von (1):

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x,t_2)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} u(x,t_1)\,dx + a\int_{t_1}^{t_2} u(x_1,t)\,dt - a\int_{t_1}^{t_2} u(x_2,t)\,dt, \tag{2}$$

für beliebige x_1, x_2, t_1 und t_2 erfüllt.

2. Aufgabe:

Betrachten Sie das eindimensionale, skalare Cauchyproblem

$$u_t + f(u)_x = 0, \qquad u|_{t=0} = u_0. \tag{3}$$

Zeigen Sie, daß sich die von den zwei Punkten $x_1 < x_2$ ausgehenden Charakteristiken zum Zeitpunkt

$$T = \frac{x_2 - x_1}{f'(u_0(x_1)) - f'(u_0(x_2))}$$

schneiden und folgern Sie daraus, daß das Problem (3) genau dann eine klassische Lösung besitzt, wenn $f'(u_0(x))$ monoton steigend in x ist.
Sei nun die Flußfunktion $f(u)$ konvex und für die Anfangsbedingung gelte $u_0'(\xi) < 0$. Zeigen Sie, daß sich die von einer Umgebung von ξ ausgehenden Charakteristiken spätestens zum Zeitpunkt

$$T = -\frac{1}{f''(u_0(\xi))u_0'(\xi)}$$

kreuzen und schließen sie daraus, daß das Cauchyproblem (3) mit stetig differenzierbaren Anfangsdaten u_0 eine auf das Zeitintervall $t \in [0,T]$ eingeschränkte Lösung besitzt, wobei

$$T = -\frac{1}{\min(\alpha, 0)}, \qquad \alpha = \min_{x\in\mathbb{R}} \frac{d}{dx} f'(u_0(x))$$

gilt. Warum gibt es im linearen Fall ($f(u)_x = au_x$) immer eine klassische Lösung?