Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

Sommersemester 2000

9. Übungsblatt zur Vorlesung
"Theorie und Numerik hyperbolischer Erhaltungsgleichungen"

(Konvergenz skalarer Verfahren: Stabilität)

1. Aufgabe:

Zeigen Sie die Identität

$$\|U\|_1 = \|\tilde{u}\|_1,$$

wobei $U = \{U_j\} \in l_1$ eine Gitterfunktion sei mit

$$\|U\|_1 = h \sum_{j=-\infty}^{\infty} |U_j|\,, \qquad l_1 = \{U : \|U\|_1 < \infty\},$$

und die *Erweiterung* von U zu einer stückweisen konstanten Funktion $\tilde{u}(x) = U_j$ für $x_{j-1/2} \le x < x_{j+1/2}$ ist. Überprüfen Sie ferner, daß

$$\|U\|_1 \le \|u\|_1$$

gilt, falls man andererseits $u(x)$ auf eine Gitterfunktion U durch Bildung des *Zellenmittels*

$$U_j = \bar{u}_j \equiv \frac{1}{h} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x)\,dx$$

beschränkt.

2. Aufgabe:

Zeigen Sie, daß das *Lax-Friedrichs-Schema*

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}\big(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n\big) - \frac{k}{2h}\big(f(U_{j+1}^n) - f(U_{j-1}^n)\big)$$

l_1*-kontrahierend* ist, falls die CFL-Bedingung $|kf'(u)/h| \le 1$ für alle u im Bereich $\min_j(U_j^n, V_j^n) \le u \le \max_j(U_j^n, V_j^n)$ erfüllt ist.