

**3. Übungsblatt zur Vorlesung “Modellierung mit Differentialgleichungen”**  
(Grenzschichtprobleme I)

**1. Aufgabe:**

Wir betrachten noch einmal die *Duffingsche Gleichung* (vgl. 2. Übungsblatt)

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0, \quad u(0) = a, \quad \dot{u}(0) = 0.$$

Berechnen Sie die ersten beiden Terme einer asymptotischen Entwicklung in  $u$  und  $t$ :

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2) \quad \text{und} \quad t = s(1 + \varepsilon \omega_1 + O(\varepsilon^2)).$$

Wählen Sie  $\omega_1$  derart, daß die Entwicklung gleichmäßig in  $s$  ist.

**2. Aufgabe:**

Betrachten Sie die Gleichung

$$-\varepsilon y'' + b\sqrt{\varepsilon} y' + y = 0, \quad x \in (0, 1), \quad -\sqrt{\varepsilon} y'(0) + by(0) = 1, \quad y(1) = 1.$$

Wo können Grenzschichten auftreten? Bestimmen Sie eine Näherungslösung.

**3. Aufgabe:**

Betrachten Sie das Randwertproblem

$$-\varepsilon u'' + \left(x - \frac{1}{2}\right) u' = 0, \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta, \quad (\alpha \neq \beta).$$

Lösen Sie das Problem. (Dabei wird sich ein Integral nicht explizit darstellen lassen.)  
Zeigen Sie, daß die Lösung eine Symmetrie aufweist:  $u(x) + u(1-x) = C$  für ein  $C \in \mathbb{R}$ .  
Lösen Sie das Problem als singular gestörtes Problem und nutzen Sie die Symmetrie aus.