Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

Wintersemester 1999/2000

4. Übungsblatt zur Vorlesung "Modellierung mit Differentialgleichungen"
(Grenzschichtprobleme II)

1. Aufgabe:

Wir betrachten das Randwertproblem

$$-\varepsilon\, u'' - u' = 0, \quad x \in (0,1), \quad u(0) = 0,\, u(1) = 1.$$

(a) Berechnen Sie die exakte Lösung u_ε des RWPs.

(b) Berechnen Sie $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x)$ für beliebiges $x \in (0,1]$ sowie $u_\varepsilon(0)$.

(c) Zeigen Sie, daß u_ε Grenzschichtverhalten an $x = 0$ hat.

(d) Transformieren Sie das Problem auf homogene Randbedingungen und geben Sie seine schwache Formulierung in $H_0^1(0,1)$ an. Ist die zugehörige Bilinearform symmetrisch und/oder positiv definit?

(e) Zur numerischen Lösung kann man die Ableitungen wie folgt approximieren:

$$u''(x) \approx \frac{u(x+h) - 2\,u(x) + u(x-h)}{h^2}, \quad u'(x) \approx \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2\,h}, \quad h > 0.$$

Wie sieht dann die Näherungslösung $u_j \approx u(jh)$, $j = 0, \ldots, n$, $h = 1/n$ aus? (Hinweis: Ansatz $u_j = \rho^j$.) Vergleichen Sie $\lim_{h\to 0} u_1$ mit $\lim_{h \to 0} u(h)$.

(f) Untersuchen Sie das Gleiche für die Diskretisierung

$$u''(x) \approx \frac{u(x+h) - 2\,u(x) + u(x-h)}{h^2}, \quad u'(x) \approx \frac{u(x) - u(x-h)}{h}.$$

2. Aufgabe:

Betrachten Sie die Gleichung

$$-\varepsilon^2\, u'' + u = f, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 1 \quad \text{und} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 < x \le \frac{1}{2} \\ 1 & \phantom{\text{für}} \quad \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}.$$

Lösen Sie das Randwertproblem. Wo hat man es mit einer Grenzschicht zu tun? Bestimmen Sie die reduzierte Lösung sowie die Grenzschichtlösung.

3. Aufgabe:

Wir betrachten die Funktion aus Beispiel 1.9 Skript:

$$u_\varepsilon(x) \quad = \quad x\left(\frac{e^{-x/\varepsilon}}{x+\varepsilon^2}+1\right), \quad x \in [0,1].$$

Zeigen Sie:

- $\bar{u}$ mit $\bar{u}(x) = x$ erfüllt die Bedingung aus Satz 1.5 Skript.
- $\xi_1 = x/\varepsilon$, $\xi_2 = x/\varepsilon^2$ sind Grenzschichtvariablen. Berechnen Sie die lokalen Grenzwerte von u_ε bezüglich ξ_1, ξ_2 und deren Definitionsbereiche.
- Die Koeffizientenfunktionen $\bar{u}_1$, $\tilde{u}_1$, $\hat{u}_1$ in der asymptotischen Entwicklung von u_ε (vgl. Seite 16 Skript) haben die Darstellungen:

$$\bar{u}_1(x) = 0, \quad \tilde{u}_1(\xi_1) = \frac{1-e^{-\xi_1}}{\xi_1}, \quad \hat{u}_1(\xi_2) = \frac{1}{1+\xi_2}.$$