Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

Wintersemester 1999/2000

1. Übungsblatt zur Vorlesung "Modellierung mit Differentialgleichungen"
(Skalierung)

1. Aufgabe:

Es soll der Strömungswiderstand (d.h. die *Widerstandskraft*) F_W einer Kugel gemessen werden. Wir nehmen an, daß F_W durch den Kugeldurchmesser D, die Anströmgeschwindigkeit c, die Dichte des Fluids ρ und die kinematische Zähigkeit ν bestimmt wird:

$$F_W = f(D, c, \rho, \nu). \qquad (1)$$

Die kinematische Zähigkeit hat die Dimension $m^2 s^{-1}$. Geben Sie eine dimensionslose Form von (1) an, indem Sie Durchmesser, Zähigkeit und Geschwindigkeit als Referenzgrößen verwenden.

2. Aufgabe:

Betrachten Sie die *Schrödinger Gleichung*

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi \quad \text{und } \psi(x,0) = \psi_0(x)$$

mit $\psi(x,t)$ als Wellenfunktion (Dimension $\mathrm{m}^{-\frac{3}{2}}$), m als Masse und $\hbar$ als Plancksches Wirkungsquantum (Dimension $Js = \mathrm{kg}\,\mathrm{m}^2 s^{-1}$). Skalieren Sie die Gleichung für:

(a) $V \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}^+$,

(b) $V \equiv 0$, $x \in [0, L]$, $t \in [0, T]$,

(c) $V(x) = m\omega^2\|x\|^2$, $x \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}^+$, $[\omega] = s^{-1}$.

3. Aufgabe:

Ein an einer ebenen Behälterwand angebrachter konischer Wärmestrahler taucht vollständig in eine Flüssigkeit ein und erwärmt diese. Die Temperatur T entlang der Achse des Strahlers genügt der Differentialgleichung

$$(x^2 T')' = \frac{2\alpha}{R}\sqrt{L^2 + R^2}\,(T - T_F)\,x, \quad x \in (0, L)$$

mit den Randbedingungen $T'(0) = 0$ und $T(L) = T_W$. Dabei sind L die Länge des Strahlers, R der Radius der Grundfläche des Strahlers, T_F die Temperatur der Flüssigkeit, T_W die Temperatur an der Wand, α eine Größe der Dimension cm^{-1}. (Es ist $\alpha = h/k$ mit h die konvektive Wärmeübertragung und k der Wärmeleitkoeffizient des Strahlers.) Ersetzen Sie x und T durch geeignete dimensionslose Größen $s, \vartheta \in (0, 1)$ und geben Sie damit eine dimensionslose Formulierung des Problems an.
(Hinweis: Ansatz für ϑ: $T(\vartheta) = T_F + (T_W - T_F)\,\vartheta$)

4. Aufgabe:

Betrachten Sie die *Van–der–Pol Gleichung*

$$LC\,\frac{d^2E}{d\tau^2} + RC\,\frac{dE}{d\tau} + E = M\sigma\,\frac{dE}{d\tau}\left(1 - \frac{E^2}{{E_s}^2}\right)$$

mit E, E_s als Spannungen ($V_{olt} = JA^{-1}s^{-1}$), τ als Zeit (Sekunden s), L, M als Induktivitäten ($H_{enry} = JA^{-2}$), C als Kapazität ($F_{arad} = J^{-1}A^2s^2$), R als Widerstand ($\Omega = JA^{-2}s^{-1}$) und σ als Impedanz ($J^{-1}A^2s$). Skalieren Sie die Gleichung im (J, A, s)–System auf

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \alpha\left(\pm 1 - y^2\right)\frac{dy}{dt} + y = 0.$$