Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

Wintersemester 1999/2000

2. Übungsblatt zur Vorlesung "Modellierung mit Differentialgleichungen"

(Regulär und singulär gestörte Probleme)

1. Aufgabe:

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Anfangswertprobleme *regulär* bzw. *singulär* gestört? Berechnen Sie ggf. die asymptotischen Entwicklungen (und lesen Sie daraus die exakte Lösung ab).

$$\begin{aligned}
&(a) \qquad \varepsilon\, y' + y = x, \qquad x > 0, \qquad y(0) = \alpha; \\
&(b) \qquad y' + \varepsilon\, y = x, \qquad x > 0, \qquad y(0) = \alpha; \\
&(c) \qquad y' + y = \varepsilon\, x, \qquad x > 0, \qquad y(0) = \alpha.
\end{aligned}$$

2. Aufgabe:

Betrachten Sie die Gleichung

$$y' + y = \varepsilon\, y^2, \quad x > 0, \quad y(0) = 1.$$

Bestimmen Sie die exakte Lösung y und die ersten drei Terme y_k, $(k = 0, 1, 2)$ einer asymptotischen Entwicklung der Lösung. Vergleichen Sie y und $\sum_{k=0}^{2} y_k\, \varepsilon^k$ mittels einer Reihendarstellung von y. Wie groß ist der Gültigkeitsbereich der Reihendarstellung?

3. Aufgabe:

Betrachten Sie die *Duffingsche Gleichung*

$$\ddot{u} + u + \varepsilon\, u^3 = 0, \quad u(0) = a, \quad \dot{u}(0) = 0.$$

(Die Duffing–DGL $\ddot{u} + \alpha\, u + \beta\, u^3 = 0$ beschreibt u.a. die Bewegungsgleichung eines ungedämpften Federpendels mit kubisch von der Auslenkung abhängiger Rückstellkraft.)
Bestimmen Sie die ersten zwei Terme einer asymptotischen Entwicklung der Lösung.
(Hinweis: $\cos^3 t = (\cos 3t + 3\cos t)/4$)
Wie verhält sich die Entwicklung für $t \to \infty$?
Zeigen Sie durch Multiplikation der Gleichung mit $\dot{u}$ und Integration über $[0, T]$ (für $T \in \mathbb{R}$ beliebig), daß die exakte Lösung der Gleichung gleichmäßig beschränkt ist.