Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

Wintersemester 1999/2000

3. Übungsblatt zur Vorlesung "Modellierung mit Differentialgleichungen"
(Grenzschichtprobleme I)

1. Aufgabe:

Wir betrachten noch einmal die *Duffingsche Gleichung* (vgl. 2. Übungsblatt)

$$\ddot{u} + u + \varepsilon\, u^3 = 0, \quad u(0) = a, \quad \dot{u}(0) = 0.$$

Berechnen Sie die ersten beiden Terme einer asymptotischen Entwicklung in u und t:

$$u = u_0 + \varepsilon\, u_1 + O(\varepsilon^2) \quad \text{und} \quad t = s\,(1 + \varepsilon\,\omega_1 + O(\varepsilon^2)).$$

Wählen Sie ω_1 derart, daß die Entwicklung gleichmäßig in s ist.

2. Aufgabe:

Betrachten Sie die Gleichung

$$-\varepsilon\, y'' + b\sqrt{\varepsilon}\, y' + y = 0, \quad x \in (0,1) \qquad -\sqrt{\varepsilon}\, y'(0) + b\, y(0) = 1, \;\; y(1) = 1.$$

Wo können Grenzschichten auftreten? Bestimmen Sie eine Näherungslösung.

3. Aufgabe:

Betrachten Sie das Randwertproblem

$$-\varepsilon\, u'' + \left(x - \frac{1}{2}\right) u' = 0, \quad x \in (0,1), \qquad u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta, \quad (\alpha \neq \beta).$$

Lösen Sie das Problem. (Dabei wird sich ein Integral nicht explizit darstellen lassen.) Zeigen Sie, daß die Lösung eine Symmetrie aufweist: $u(x) + u(1-x) = C$ für ein $C \in \mathbb{R}$. Lösen Sie das Problem als singulär gestörtes Problem und nutzen Sie die Symmetrie aus.