Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

Wintersemester 1999/2000

5. Übungsblatt zur Vorlesung "Modellierung mit Differentialgleichungen"
(Burgers und ähnliche Gleichungen)

1. Aufgabe:

Sei I ein offenes Intervall und seien $f, g \in C^1(\mathbb{R})$. Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$u_t + g(u)u_x = 0 \quad \text{in} \quad I \times \mathbb{R}, \quad u(t=0,x) = f(x)$$

und zeigen Sie: Unter der Annahme, daß es $(t_0, x_0, u_0) \in I \times \mathbb{R}^2$ gibt mit

$$u_0 = f(x_0 - t_0\, g(u_0)) \qquad \text{und} \qquad 1 + f'(x_0 - t_0\, g(u_0))\, g'(u_0)\, t_0 \neq 0$$

hat das Anfangswertproblem um $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung.
Lösen Sie damit die *nicht–viskose Burgers Gleichung* $u_t + uu_x = 0$ für $(t, x, u) \in \mathbb{R}^3$, $t \neq 1$, mit $u(t=0,x) = -x$.

2. Aufgabe:

Betrachten Sie die *Burgers Gleichung*

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = \varepsilon u_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Untersuchen Sie die sog. *Travelling–Waves Lösungen*, d.h. $u(\xi)$ mit $\xi = x - ct$.
Zeigen Sie: Unter der Annahme $u(-\infty) = u_- \in \mathbb{R}$ und $u'(-\infty) = 0$ genügt $u(\xi)$ der *Riccatigleichung*

$$\varepsilon u' = \tfrac{1}{2}(u-c)^2 - \tfrac{1}{2}(u_- - c)^2, \qquad u(-\infty) = u_-. \tag{1}$$

Eine stationäre Lösung der Gleichung ist natürlich $u \equiv u_-$.
Zeigen Sie, daß (1) i.a. eine zweite stationäre Lösung $u \equiv u_+$ besitzt.
Lösen Sie (1). Unter welchen Bedingungen existiert eine Lösung, die u_- mit u_+ verbindet?

3. Aufgabe:

Betrachte Sie nun die *Korteweg–de–Vries Gleichung*

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = \delta u_{xxx}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Stellen Sie auch hier eine Travelling–Waves Gleichung auf. Multiplikation mit u' und Integration unter der Annahme $u(-\infty) = u_- \in \mathbb{R}$ und $u'(-\infty) = 0$ liefert eine ähnliche DGL wie zuvor. Betrachten Sie das Phasenbild der DGL, d.h. tragen Sie $v = u'$ gegen u auf und diskutieren Sie, ob es eine Verbindung von u_- nach u_+ gibt.