Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Wintersemester 2001/2002

10. Übungsblatt zur Vorlesung "Numerik partieller Differentialgleichungen"
(Ansatzräume, Galerkin–Verfahren)

1. Aufgabe (2 Punkte (1+1))

Es sei $V = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = 0\}$.
Wir wählen als *Ansatzraum* $V_h = \text{Span}\{\phi_j, j = 1, \ldots, N\}$ mit

$$\phi_j(x) = \max(0, 1 - |Nx - j|), \quad x \in [0,1], \quad j = 1, \ldots, N.$$

a) Zeigen Sie: $V_h \subset V$.

b) Beweisen Sie, daß V_h ein N–dimensionaler Unterraum von V ist.

2. Aufgabe (5 Punkte (1+1+1+1+1))

Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \pi^2 \cos(\pi x), \quad (x,y) \in \Omega = (0,1)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

a) Geben Sie eine schwache Formulierung an.

b) Das Randwertproblem hat eine eindeutige Lösung, falls man zusätzlich $\int_\Omega u = 0$ fordert. Als Basisfunktionen wählen wir

$$b_1(x,y) = x - \frac{1}{2}, \qquad b_2(x,y) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^3.$$

Zeigen Sie, daß die zugehörigen Ansatzfunktionen die obige Bedingung erfüllen.

c) Berechnen Sie die zugehörige Steifigkeitsmatrix und die Näherung der rechten Seite.

d) Berechnen Sie die Näherungslösung u_h.

e) Zeigen Sie, daß $\dfrac{\partial u_h}{\partial n}(0,y) \neq 0$ gilt.

3. Aufgabe (3 Punkte (1+1+1))

Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u'' &= 1, \quad x \in (0,1) \\ u(0) &= 0, \quad u'(1) = 0. \end{aligned}$$

Als angepaßter Funktionenraum wird $V = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = 0\}$ gewählt. Als Ansatzfunktionen seien $\phi_j = x^j/j,\ j = 1, \dots, N$ gewählt. Sei nun $h = 1/N$ und

$$V_h = \mathrm{Span}\{\phi_j, j = 1, \dots, N\}.$$

a) Zeigen Sie: $V_h \subset V$.

b) Berechnen Sie die zu V_h zugehörige Steifigkeitsmatrix des Galerkin–Verfahrens.

c) Berechnen Sie mit MATLAB bzw. SCILAB die Kondition der Steifigkeitsmatrix für $N = 10$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

4. Aufgabe (Praktische Aufgabe) (5 Punkte)

Gegeben sei das Randwertproblem

$$-(a(x)u')' = 1, \quad x \in (-1,1), \quad u(-1) = u(1) = 0$$

mit

$$a(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0, \\ 0.5, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

a) Diskretisieren Sie das Randwertproblem mittels *linearer finiter Elemente* auf einem äquidistanten Gitter der Schrittweite h.

b) Geben Sie das diskrete Gleichungssystem an.

c) Lösen Sie das diskrete System für die Schrittweiten $h = 1/10$, $1/20$ und geben Sie die Lösung graphisch aus.

Für die Lösung können Sie die PDE–Toolbox für Matlab bzw. die FreeFEM–Toolbox für Scilab benutzen.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 15.1. **vor** der Vorlesung. **Abgabe** der Lösungen zu der praktischen Aufgabe am Mo, 28.1. in den Sprechstunden.