Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Wintersemester 2001/2002

11. Übungsblatt zur Vorlesung "Numerik partieller Differentialgleichungen"
(Steifigkeitsmatrix, Triangulierung)

1. Aufgabe (3 Punkte)

Zeigen Sie, daß die *Steifigkeitsmatrix* aus der Folgerung im Kapitel 6.4 (Galerkin–Verfahren) symmetrisch und positiv definit ist.

2. Aufgabe (4 Punkte (0.5+1+2+0.5))

Zu lösen sei die Poisson–Gleichung im Einheitsquadrat

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \quad \text{in } \Omega = (0,1)^2 \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Es werde $\bar{\Omega}$ mit einem gleichmäßigen Dreiecknetz der Maschenweite h, wie in Abb. 1, überzogen.

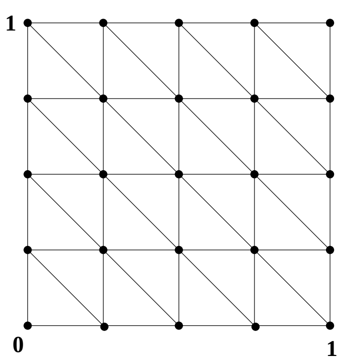


Abbildung 1:

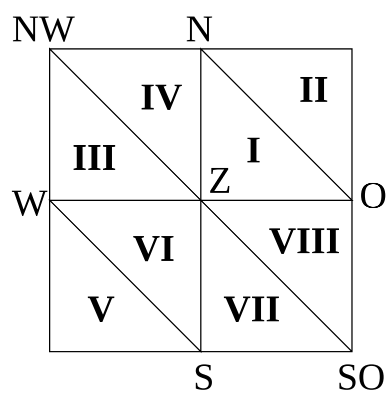


Abbildung 2:

Wir wählen den Ansatzraum

$$V_h := \{v \in C(\bar{\Omega}) : v \text{ ist in jedem Dreieck linear und } v = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}.$$

a) Wie groß ist $N = \dim V_h$?

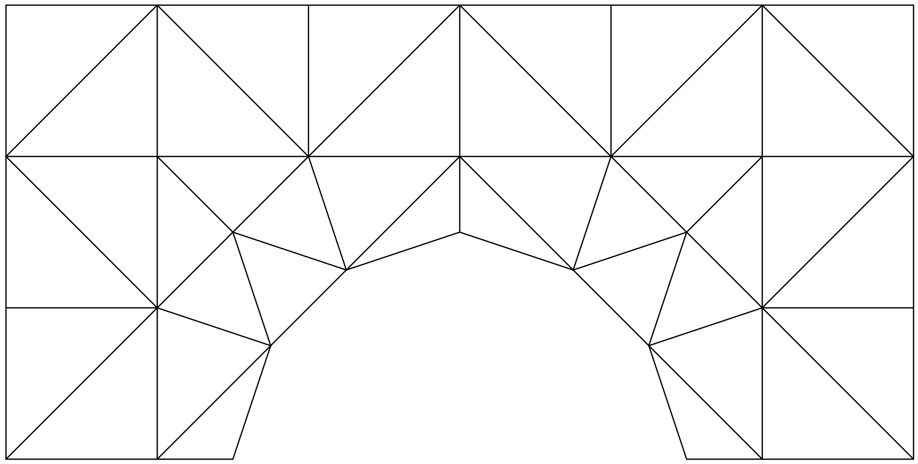
b) $v \in V_h$ ist global durch die Werte an den N Gitterpunkten (x_j, y_j) gegeben.
Wir wählen eine Basis $\{\psi_i\}_{i=1}^N$ mit $\psi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}$.
Bestimmen Sie die Ableitungen der Basisfunktion ψ_Z in den Dreiecken.

c) Berechnen Sie die Matrixelemente der *Steifigkeitsmatrix*.

d) Wie sieht das resultierende Gleichungssystem aus?

3. Aufgabe (1 Punkte)

Ist die folgende *Triangulierung* zulässig?



4. Aufgabe (2 Punkte)

Man zeige, daß bei einer *Triangulierung* eines einfach zusammenhängenden Gebietes gilt

$$\#Dreiecke + \#Knoten - \#Kanten = 1.$$

Warum gilt das nicht für mehrfach zusammenhängende Gebiete?

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 22.1. **vor** der Vorlesung.