

**14. Übungsblatt zur Vorlesung “Numerik partieller Differentialgleichungen”**  
(Fundamentallösung, Darstellungsformel)

**1. Aufgabe** (3 Punkte)

Bestimmen Sie die *Fundamentallösung*  $u^*$  des Laplace-Operators im  $\mathbb{R}^2$ , indem Sie benutzen, daß die Delta-Distribution  $\delta$  radialsymmetrisch ist.

Hinweis: 1. Übung, 2. Aufgabe

**2. Aufgabe** (2 Punkte)

Leiten Sie die *Darstellungsformel*

$$\frac{\partial u}{\partial y}(y) = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_0 + \frac{1}{2} \int_0^y f(x) dx - \frac{1}{2} \int_y^1 f(x) dx$$

für die Ableitung der Lösung der 1D-Modellaufgabe aus Kapitel 8.2 her.

**3. Aufgabe** (5 Punkte (2+1+2))

Verifizieren Sie die in Kapitel 8.4 benutzten Eigenschaften:

a)

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \varepsilon (\nabla_x u(y), e(\varphi)) + O(\varepsilon^2) \\ \tilde{v} &= -\frac{1}{2\pi\varepsilon} (e(\varphi), n_y)\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n_x} &= -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varepsilon} = -(\nabla_x u(y), e(\varphi)) + O(\varepsilon) \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial n_x} &= -\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \varepsilon} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon^2} (e(\varphi), n_y)\end{aligned}$$

c)

$$\int_0^\pi (a, e(\varphi))(b, e(\varphi)) d\varphi = \frac{\pi}{2} (a, b), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^2.$$

**Abgabe** der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 19.02. **vor** der Vorlesung.