

**2. Übungsblatt zur Vorlesung “Numerik partieller Differentialgleichungen”**  
(Differenzenapproximation, Konsistenzordnung)

**1. Aufgabe** (4 Punkte (2+2))

Zeigen Sie, daß das  $\theta$ -Schema aus der Vorlesung für  $\theta = 0.5$  und

$$\varphi_j^n = f(x_j, t_n + k/2)$$

für  $u \in C^{4,3}$  eine Approximation der Ordnung  $O(h^2 + k^2)$  liefert.

Welche Approximationsordnung ergibt sich bei diesem Schema unter Benutzung von

$$\varphi_j^n = f(x_j, t_n) \quad ?$$

Was bedeutet dies unter praktischen Gesichtspunkten?

**2. Aufgabe** (3 Punkte)

Man entwickle eine Differenzenapproximation für den Differentialoperator

$$Lu := (\kappa(x)u)'$$

durch zweimalige Anwendung von

$$u'(x) \approx \frac{1}{h} \left( u\left(x + \frac{h}{2}\right) - u\left(x - \frac{h}{2}\right) \right)$$

und studiere die Konsistenzordnung.

**3. Aufgabe** (3 Punkte (1.5+1.5))

Zur Diskretisierung von

$$-u''(x) = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0$$

wähle man ein beliebiges Gitter

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_J$$

und setze  $h_j := x_j - x_{j-1}$ .

a) Zeigen Sie, daß die folgende Diskretisierung zweckmäßig ist:

$$\frac{2}{h_j + h_{j+1}} \left( \frac{u_j - u_{j+1}}{h_{j+1}} + \frac{u_j - u_{j-1}}{h_j} \right) = f_j.$$

b) Wie verhält sich der Konsistenzfehler im Vergleich zu dem auf dem äquidistanten Gitter?

#### 4. Aufgabe (Praktische Aufgabe) (5 Punkte)

Die Temperaturverteilung in einem Stab der Länge 1 genügt der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0.$$

Die Temperatur in den beiden Endpunkten des Stabes sei gegeben durch

$$u(0, t) = u(1, t) = 12 \sin^2(12\pi t), \quad t \geq 0.$$

Am Anfang habe der Stab die Temperatur Null:  $u(x, 0) = 0$ ,  $0 < x < 1$ .

Berechnen Sie die genäherte Temperaturverteilung mit dem

- a) *expliziten Euler-Verfahren* ( $h = 1/6$ ,  $k = 1/72$ ),
- b) *Crank-Nicolson-Verfahren* ( $h = 1/10$ ).

Zum Zeitpunkt  $t=1/12$  herrscht an beiden Stabenden die Temperatur Null.

Geben Sie die jeweilige Lösung zu den Zeitpunkten  $t = 1/12$ ,  $t = 1/10$  und  $t = 1/6$  aus.

#### **Hinweis:**

Zum Vergleich können Sie die Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit Hilfe der Webpage

<http://numawww.mathematik.tu-darmstadt.de:8081/numerik/pdgl/>

berechnen.

**Abgabe** der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 6.11. **vor** der Vorlesung.

**Abgabe** der Lösungen zu der praktischen Aufgabe am Mo, 19.11. in den Sprechstunden.