

**3. Übungsblatt zur Vorlesung “Numerik partieller Differentialgleichungen”**  
( $\ell^2$ -Stabilität im von Neumannschen Sinne)

**1. Aufgabe** (2 Punkte)

Führen Sie die Stabilitätsuntersuchung des  $\theta$ -Schemas aus der Vorlesung mithilfe der *formalen Fourier-Stabilitätstechnik* nach von Neumann durch.

**2. Aufgabe** (4 Punkte)

Zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$
$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

führt die Diskretisierung  $D_t^0 u_j^n = D_x^2 u_j^n$  auf das folgende *explizite 3-Level Schema*

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} + 2\gamma (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - 4\gamma u_j^n,$$

wobei  $\gamma = k/h^2$  das parabolische Schrittweitenverhältnis bezeichnet. Bestimmen Sie die Konsistenzordnung dieses Verfahrens. Ist dieses Verfahren  $\ell^2$ -stabil (im von Neumannschen Sinne)?

**3. Aufgabe** (4 Punkte)

Eine Modifikation des Verfahrens aus der 1. Aufgabe zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung führt auf das Schema

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} + 2\gamma (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - u_j^{n+1} - u_j^{n-1}).$$

Untersuchen Sie die  $\ell^2$ -Stabilitätseigenschaften und die Konsistenzordnung dieses Verfahrens.

**Abgabe** der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 13.11. **vor** der Vorlesung.