Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Wintersemester 2001/2002

5. Übungsblatt zur Vorlesung "Numerik partieller Differentialgleichungen"
(Poisson–Gleichung, Maximumprinzip)

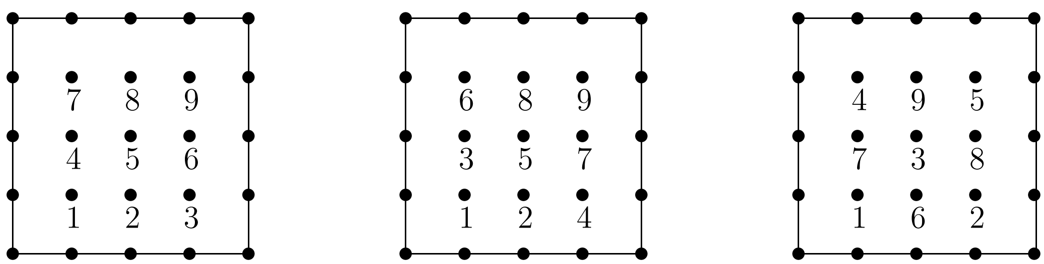
1. Aufgabe (4 Punkte (3+0.5+0.5))

Die *Poisson–Gleichung* auf dem Gebiet $\Omega = [0,1] \times [0,1]$:

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= f(x,y), \qquad && (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) &= 0, && (x,y) \in \partial\Omega \end{aligned}$$

soll mit dem Fünfpunktestern und $h = 1/4$ diskretisiert werden.

a) Wie lautet das Gleichungssystem für folgende Numerierungen:



i) zeilenweise   ii) diagonal   iii) Schachbrett

b) Prüfen Sie jeweils, ob die Matrix A symmetrisch ist.

c) Zeigen Sie, daß die Matrix A im Falle i) positiv definit ist.

2. Aufgabe (3 Punkte)

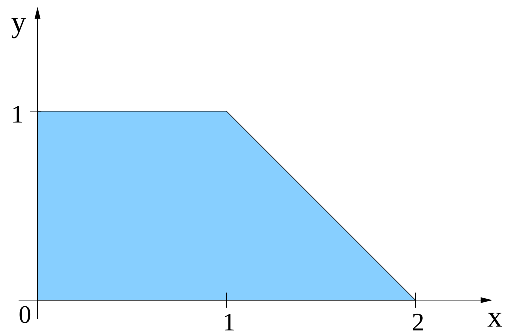
Beweisen Sie die Folgerung 6 aus Kapitel 3.4 der Vorlesung.

3. Aufgabe (3 Punkte)

Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 \qquad && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei Ω die folgende Gestalt hat:



Leiten Sie mittels des angegebenen *Maximum–Minimum–Prinzips* untere und obere Schranken für die Lösung u her.

Hinweis: Benutzen Sie die Vergleichsfunktion $v(x,y) = \dfrac{(2-x)x}{4} + \dfrac{(1-y)y}{4}$.

Definition: Der lineare Differentialoperator

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\,u + \sum_{i,j=1}^{n} b_i(x)\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,u + cu, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

heißt *elliptisch*, falls die Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))_{ij}$ symmetrisch und positiv definit ist für alle $x \in \Omega$ und falls alle Koeffizienten beschränkt sind. Der Operator L heißt *gleichmäßig elliptisch*, falls eine Konstante C_E existiert, so daß

$$-\xi^\top A(x)\xi \geq C_E \|\xi\|^2, \qquad \text{für alle} \quad x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Maximum–Minimum–Prinzip: Sei Ω ein beschränktes Gebiet und L ein gleichmäßig elliptischer Operator mit $c \geq 0$. Die Daten seien stetig: $f \in C(\bar{\Omega})$, $\mu \in C(\partial\Omega)$ und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ sei klassische Lösung von

$$\begin{aligned} Lu &= f && \text{in } \Omega \\ u &= \mu && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

Dann gilt

a) $f \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad u \geq \min\limits_{x \in \partial\Omega} \mu,$

b) $f \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad u \leq \max\limits_{x \in \partial\Omega} \mu,$

c) $f = 0 \quad \Longrightarrow \quad |u| \leq \max\limits_{x \in \partial\Omega} |\mu|,$

d) f beliebig $\quad \Longrightarrow \quad |u| \leq \max\limits_{x \in \partial\Omega} |\mu| + K \max\limits_{x \in \Omega} |f|.$

4. Aufgabe (Praktische Aufgabe) (5 Punkte)

Diskretisieren Sie die *Poisson–Gleichung*

$$
\begin{aligned}
-\Delta u(x,y) &= 3x^2, \qquad (x,y) \in \Omega = (-1,1)^2 \\
u(x,y) &= 0, \qquad\qquad (x,y) \in \partial\Omega, \quad x \neq 1 \\
u(1,y) &= \frac{1}{4}\,\sin\Big(\frac{y+1}{2}\,\pi\Big), \quad y \in (-1,1)
\end{aligned}
$$

unter Benutzung des Fünfpunktesterns mit der Schrittweite $h = \Delta x = \Delta y = 1/8$. Berechnen Sie eine Näherungslösung und geben Sie diese graphisch aus.

Hinweis:
Zum Vergleich können Sie die Lösung der Helmholtzgleichung (mit $\lambda = 0$) mit der Page

`http://numawww.mathematik.tu-darmstadt.de:8081/numerik/pdgl/`

berechnen. Diese Lösung erhalten Sie auch mit dem Aufruf `pdedemo8` unter `Matlab`.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 27.11. **vor** der Vorlesung.
Abgabe der Lösungen zu der praktischen Aufgabe am Mo, 10.12. in den Sprechstunden.