Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Wintersemester 2001/2002

13. Übungsblatt zur Vorlesung "Numerik partieller Differentialgleichungen"
(Methode der einfachen Iteration, V–Zyklus, W–Zyklus, Restprojektor)

1. Aufgabe (4.5 Punkte (1+2+0.5+0.5+0.5))

Bei der *Methode der einfachen Iteration* ist der Parameter $\tau \in \mathbb{R}$ so zu wählen, daß

$$q(\tau) := \max_{\gamma_1 \le t \le \gamma_2} |1 - \tau t|\,, \qquad 0 < \gamma_1 \le \gamma_2$$

minimal wird. Es sei $q(\tau^*) = \min_{\tau \in \mathbb{R}} q(\tau)$. Skizzieren Sie $|1 - \tau t|$ als Funktion von t für verschiedene Werte von τ und begründen Sie, daß

a) $q(\tau) < 1$ für $0 < \tau < \dfrac{2}{\gamma_2}$

b) $q(\tau^*) = \dfrac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} < 1$ für $\tau = \tau^* = \dfrac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$

gilt. Erläutern Sie anhand der Skizze die folgenden Bemerkungen:

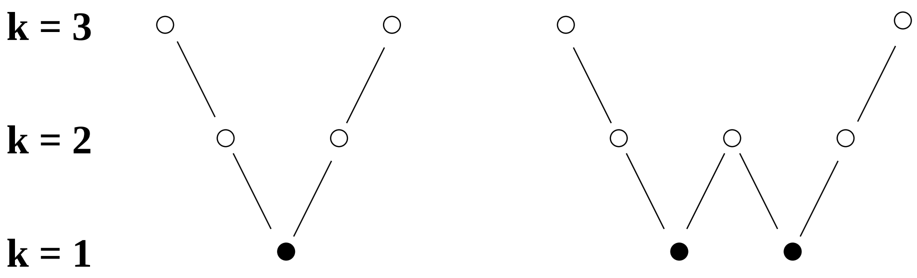
a) Für $\tau = 2/\gamma_2$ erreicht man die bestmögliche, aber immer noch schlechte Dämpfung von niedrigfrequenten Komponenten des Fehlers (kleine Eigenwerte).

b) Für $\tau < 2/\gamma_2$ kann man eine "gute" Dämpfung von hochfrequenten Komponenten des Fehlers erreichen, etwa auf $[\tilde{\gamma}, \gamma_2]$ für $\tau = 2/(\tilde{\gamma} + \gamma_2)$.

c) $\tau = \tau^*$ ist zur Dämpfung von hochfrequenten Komponenten nicht geeignet!

2. Aufgabe (2.5 Punkte (1+1.5))

Die Bezeichnungen *V–Zyklus* bzw. *W–Zyklus* rühren daher, daß die in der Abbildung gezeigten gezeigten Schemata auf 3 Gittern den Buchstaben V und W ähneln.



Wie sehen die Schemata auf 4 Gittern aus?

3. Aufgabe (3 Punkte)

Beweisen Sie Lemma 2 (Eigenschaft des *Restprojektors*) aus Kapitel 7.4 der Vorlesung. Hinweis: Beachten Sie, daß für $v \in V_k$ gilt: $\mathcal{P}_{k-1}v$ ist die Galerkin–Näherung von v in V_{k-1} und benutzen Sie Satz 6.6.1. Verwenden Sie, daß für unser Modellproblem aus Kapitel 7.1 gilt $\|v\|_{E,k,0} = \|v\|_{L^2(\Omega)}$, $v \in V_k$.

4. Aufgabe (Praktische Aufgabe) (5 Punkte (3+2))

Machen Sie sich mit der interaktiven Mehrgitter Umgebung *MGLab* in MATLAB vertraut. Eine kurze Beschreibung finden Sie auf der Vorlesungs–Homepage.
Lösen Sie die praktische Aufgabe vom 5. Übungsblatt (Poisson–Gleichung) mit einem Zweigitterverfahren ohne Vorglättung, indem Sie die Files `demo2_run.m` und `get_rhs.m` entsprechend modifizieren.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 5.02.02 **vor** der Vorlesung.
Abgabe der Lösungen zu der praktischen Aufgabe am Mo, 18.02. in den Sprechstunden.