Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Wintersemester 2001/2002

2. Übungsblatt zur Vorlesung "Numerik partieller Differentialgleichungen"

(Differenzenapproximation, Konsistenzordnung)

1. Aufgabe (4 Punkte (2+2))

Zeigen Sie, daß das θ–Schema aus der Vorlesung für $\theta = 0.5$ und

$$\varphi_j^n = f(x_j, t_n + k/2)$$

für $u \in C^{4,3}$ eine Approximation der Ordnung $\mathrm{O}(h^2 + k^2)$ liefert.
Welche Approximationsordnung ergibt sich bei diesem Schema unter Benutzung von

$$\varphi_j^n = f(x_j, t_n) \ \ ?$$

Was bedeutet dies unter praktischen Gesichtspunkten?

2. Aufgabe (3 Punkte)

Man entwickle eine Differenzenapproximation für den Differentialoperator

$$Lu := (\kappa(x)u')'$$

durch zweimalige Anwendung von

$$u'(x) \approx \frac{1}{h}\left(u\Big(x + \frac{h}{2}\Big) - u\Big(x - \frac{h}{2}\Big)\right)$$

und studiere die Konsistenzordnung.

3. Aufgabe (3 Punkte (1.5+1.5))

Zur Diskretisierung von

$$-u''(x) = f(x), \quad u(0) = u(1) = 0$$

wähle man ein beliebiges Gitter

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_J$$

und setze $h_j := x_j - x_{j-1}$.

a) Zeigen Sie, daß die folgende Diskretisierung zweckmäßig ist:

$$\frac{2}{h_j + h_{j+1}}\left(\frac{u_j - u_{j+1}}{h_{j+1}} + \frac{u_j - u_{j-1}}{h_j}\right) = f_j.$$

b) Wie verhält sich der Konsistenzfehler im Vergleich zu dem auf dem äquidistanten Gitter?

4. Aufgabe (Praktische Aufgabe) (5 Punkte)

Die Temperaturverteilung in einem Stab der Länge 1 genügt der Wärmeleitungsleichung

$$u_t = u_{xx}, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0.$$

Die Temperatur in den beiden Endpunkten des Stabes sei gegeben durch

$$u(0,t) = u(1,t) = 12\sin^2(12\pi t), \quad t \geq 0.$$

Am Anfang habe der Stab die Temperatur Null: $u(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1$.
Berechnen Sie die genäherte Temperaturverteilung mit dem

a) *expliziten Euler–Verfahren* ($h = 1/6$, $k = 1/72$),

b) *Crank–Nicolson–Verfahren* ($h = 1/10$).

Zum Zeitpunkt t=1/12 herrscht an beiden Stabenden die Temperatur Null.
Geben Sie die jeweilige Lösung zu den Zeitpunkten $t = 1/12$, $t = 1/10$ und $t = 1/6$ aus.

Hinweis:
Zum Vergleich können Sie die Lösung der Wärmeleitungsleichung mit Hilfe der Webpage

`http://numawww.mathematik.tu-darmstadt.de:8081/numerik/pdgl/`

berechnen.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 6.11. **vor** der Vorlesung.
Abgabe der Lösungen zu der praktischen Aufgabe am Mo, 19.11. in den Sprechstunden.