Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Wintersemester 2001/2002

# 4. Übungsblatt zur Vorlesung "Numerik partieller Differentialgleichungen"

(Tridiagonalmatrizen, Diskretes Maximumprinzip, $\ell^\infty$–Stabilität)

**1. Aufgabe** (2 Punkte)

Zeigen Sie, daß die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der *Tridiagonalmatrix*

$$T = \mathrm{tridiag}(a,b,c) = \begin{pmatrix} b & c & 0 & \dots & 0 \\ a & b & c & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & a & b & c \\ 0 & \dots & 0 & a & b \end{pmatrix}_{N\times N}$$

gegeben sind durch

$$\lambda_j = b + 2c\sqrt{\frac{a}{c}}\cos\frac{j\pi}{N+1}$$

und $u_j = (u_1, \dots, u_k, \dots, u_N)^\top$ mit

$$u_k = 2\left(\sqrt{\frac{a}{c}}\right)^k \sin\frac{kj\pi}{N+1}, \qquad k = 1,\dots,N, \quad j = 1,\dots,N.$$

**2. Aufgabe** (3 Punkte (1.5+1.5))

Beweisen Sie die Folgerungen 1 und 2 in Kapitel 2.5 der Vorlesung.

**3. Aufgabe** (5 Punkte (2.5+2.5))

Wir betrachten ein finites Differenzenverfahren für die *Konvektions–Diffusionsgleichung*

$$\begin{aligned} u_t &= a u_{xx} - b u_x, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0, \end{aligned}$$

wobei $a > 0$. Der Einfachheit halber nehmen wir $b > 0$ an.
Schreiben Sie das Schema $D_t^+ u_j^n = a D_x^2 u_j^n - b D_x^0 u_j^n$, $j = 1, \dots, J-1$, in der Form

$$u_j^{n+1} = (1 - 2a\gamma)u_j^n + a\gamma(1 - P_e)u_{j+1}^n + a\gamma(1 + P_e)u_{j-1}^n, \qquad P_e = \frac{bh}{2a}$$

und beweisen Sie, daß für das Schema gilt

$$P_e \le 1 \implies \max_{0\le j\le J} |u_j^{n+1}| \le \max_{0\le j\le J} |u_j^n|$$

(vorausgesetzt die $\ell^2$–Stabilitätsbedingung $a\gamma \le 1/2$ für $\gamma := k/h^2$ ist erfüllt).
Geben Sie ein Beispiel dafür an, daß die obige Maximumnormabschätzung für $P_e > 1$ im allgemeinen nicht mehr gilt.

**Abgabe** der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 20.11. **vor** der Vorlesung.