Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Wintersemester 2001/2002

6. Übungsblatt zur Vorlesung "Numerik partieller Differentialgleichungen"

(Diskretisierungen höherer Ordnung)

1. Aufgabe (6 Punkte (2+2+2))

Betrachten Sie das folgende Randwertproblem 2. Ordnung

$$-u'' = f \quad \text{in} \quad \Omega = (0,1)$$
$$u(0) = u(1) = 0$$

und eine beliebige 3–Punkt–Approximation

$$\frac{1}{h^2}\big(\alpha_{i,0}u_{i-1} + \alpha_{i,1}u_i + \alpha_{i,2}u_{i+1}\big) = \sum_{j=1}^{J} \beta_{i,j} f(\tau_{i,j})$$
$$u_0 = u_N = 0$$

auf dem Teilintervall $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, wobei $\alpha_{i,0}, \alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \beta_{i,j}$ zu bestimmende Parameter und $\tau_{i,j} \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ Hilfspunkte sind. Für das Schema soll gelten:

a) Das Schema ist exakt auf einem (L+1)–dimensionalen Raum S, d.h.

$$\frac{1}{h^2}\big(\alpha_{i,0}s_\ell(x_{i-1}) + \alpha_{i,1}s_\ell(x_i) + \alpha_{i,2}s_\ell(x_{i+1})\big) = -\sum_{j=1}^{J} \beta_{i,j} s''_\ell(\tau_{i,j})$$

für $\ell = 0, \ldots, L$, wenn $s_0,\ s_1, \ldots, s_L$ eine Basis von S bezeichnet.
In der Regel wird S dabei ein Teilraum der Polynome sein:

Lemma: *Ist S der Raum der Polynome vom Grad $\leq L$, so ist die Konsistenzordnung des Verfahrens $L-1$.*

b) Normierungsbedingung $\sum_{j=1}^{J} \beta_{i,j} = 1$.

Wählen Sie eine polynomiale Basis und lösen Sie folgende Fragestellungen:

a) Welches Verfahren liefert $J = 1$, $\tau_{i,1} = x_i$?

b) Wie erhält man mit $J = 3$ das bekannte *Verfahren 4. Ordnung*

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = \frac{1}{12}\big(f(x_{i-1}) + 10f(x_i) + f(x_{i+1})\big)$$

c) Kann man mit $J = 3$ eine noch höhere Konsistenzordnung erreichen?

Hinweis: Setzen Sie o.B.d.A. $x_i = 0$ und betrachten Sie das Intervall $[-h, h]$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Schreiben Sie das *Schema höherer Ordnung* aus der Vorlesung:

$$\begin{aligned} \Lambda' u(x) &= -\varphi(x), \qquad && x \in \Omega_h \\ u(x) &= \mu(x), && x \in \Gamma_h \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \Lambda' &= \Lambda_1 + \Lambda_2 + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 \\ \varphi &= f + \frac{h_1^2}{12} \Lambda_1 f + \frac{h_2^2}{12} \Lambda_2 f \end{aligned}$$

in der Form des *diskreten Maximumprinzips*. Unter welchen Bedingungen an h_1, h_2 sind die Voraussetzungen des Maximumprinzips erfüllt?

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 4.12. **vor** der Vorlesung.