Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Wintersemester 2001/2002

7. Übungsblatt zur Vorlesung "Numerik partieller Differentialgleichungen"
(distributive Ableitung, Sobolev–Räume, Dualräume)

1. Aufgabe (3 Punkte (1+2))

a) Bestimmen Sie die *distributive Ableitung* von

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Existiert die *verallgemeinerte Ableitung* von H ?

b) Berechnen Sie die ersten zwei distributiven Ableitungen von

$$f(x) = |\sin x|.$$

2. Aufgabe (4 Punkte (2+2))

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit $0 \in \Omega$. Man beweise, daß die Funktion $u(x) = \|x\|_2^\sigma$ ein Element von $H^1(\Omega)$ ist, falls $\sigma = 0$ oder $2\sigma + n > 2$.

b) Sei $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < r_0\}$ mit $r_0 < 1$. Ist die Funktion

$$u(x,y) = \left(\log\Big(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\Big)\right)^k, \quad k < \frac{1}{2}$$

stetig? Gilt $u \in H^1(\Omega)$?

3. Aufgabe (3 Punkte (1+2))

Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum und X' der zugehörige *Dualraum*, d.h. der Raum der stetigen linearen Funktionale auf X. Zeigen Sie

a) $\|F\|_{X'} := \sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \dfrac{|F(x)|}{\|x\|_X}$ ist eine Norm auf X'.

b) $(X', \|\cdot\|_{X'})$ ist ein Banach–Raum.

4. Aufgabe (Praktische Aufgabe) (5 Punkte)

Lösen Sie die praktische Aufgabe vom 5. Übungsblatt mit dem *Schema höherer Ordnung* aus der Vorlesung, Kapitel 3.7.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 11.12. **vor** der Vorlesung.
Abgabe der Lösungen zu der praktischen Aufgabe am Mo, 7.01.02 in den Sprechstunden.