Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Wintersemester 2001/2002

8. Übungsblatt zur Vorlesung "Numerik partieller Differentialgleichungen"

(Friedrichs–Ungleichung, Poincaré–Ungleichung, Sobolev–Ungleichung)

1. Aufgabe (3 Punkte (2+1))

a) Man beweise die folgende *Ungleichung von Wirtinger*: Sei $u \in C^1([0,2\pi])$, $u(0) = u(2\pi)$ und $\int_0^{2\pi} u(t)\,dt = 0$. Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} u(t)^2\,dt \le \int_0^{2\pi} u'(t)^2\,dt.$$

Hinweis: Man setze für u eine Fourierentwicklung an und benutze die Parsevalsche Gleichung.

b) Weiter zeige man, daß aus diese Ungleichung für $f \in C^1([a,b])$ bei der Annahme $f(a) = f(b) = 0$ die *klassische Friedrichs–Ungleichung*

$$\int_a^b f(x)^2\,dx \le \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \int_a^b f'(x)^2\,dx.$$

folgt.

2. Aufgabe (4 Punkte (1+2+1))

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Zeigen Sie:

a) Durch

$$\|u\|_{\Omega,c} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + c(x)\,u^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

wird auf $V = H_0^1(\Omega)$ eine Norm definiert, falls $c \in L^\infty(\Omega)$ und $c \ge 0$ fast überall.

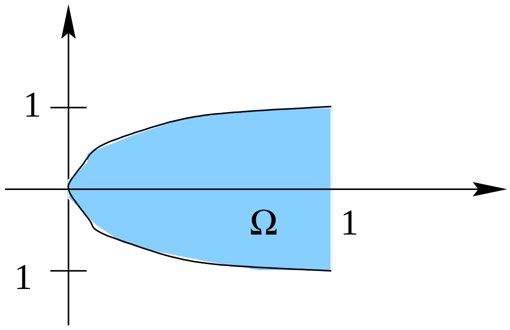
b) Der Laplace–Operator ist *koerziv* auf $(V, \|u\|_{\Omega,c})$, d.h. es existiert eine Konstante $c_2 > 0$ mit

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \ge c_2\,\|u\|_{\Omega,c}^2.$$

c) Wie hängt die Koerzivitätskonstante von der verwendeten Norm ab?

3. Aufgabe (3 Punkte (2.5+0.5)

Sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ |y| < x^r,\ r > 1\}$ und $u(x,y) = x^{-\varepsilon/p},\ (x,y) \in \Omega.$



a) Für welche p gilt $u \in W_p^1(\Omega)$?

b) Für $\varepsilon > 0$ ist u in Ω unbeschränkt.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 18.12. **vor** der Vorlesung.