Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Dr. M. Ehrhardt

Wintersemester 2001/2002

9. Übungsblatt zur Vorlesung "Numerik partieller Differentialgleichungen"

(Schwache Formulierung, Lax–Milgram)

1. Aufgabe (2 Punkte (1+1))

In der Vorlesung wurde für das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u'' + \alpha u' + u &= f, \quad x \in (0,1) \\ u'(0) = u'(1) &= 0 \end{aligned}$$

(mit $\alpha = 1$) eine schwache Formulierung mit einer nichtsymmetrischen, stetigen und koerziven Bilinearform hergeleitet.

a) Sei $\alpha = 1$. Begründen Sie, warum es für $f \in L^2(0,1)$ genau eine schwache Lösung $u \in H^1(0,1)$ gibt.

b) Zeigen Sie: Wenn $\alpha \in \mathbb{R}$ hinreichend groß ist, dann ist die zugehörige Bilinearform nicht mehr koerziv auf $H^1(0,1)$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$-(a(x)u')' = 0, \quad x \in (-1,1), \quad u(-1) = 3,\ u(1) = 0$$

mit

$$a(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x < 0, \\ 0.5, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Man gebe eine *schwache Formulierung* dieser Aufgabe und bestimme ihre Lösung.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$, wobei $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.
Seien c, f, g, p, q stetig. Definiere $V := \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ auf } \Gamma_1\}$.
Die Funktion $u \in H^1(\Omega)$ mit $u = g$ auf Γ_1 erfülle die *schwache Formulierung*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + c\,uv\,dx + \int_{\Gamma_2} (pu - q)v\,ds = \int_\Omega f v\,dx \quad \text{für alle } v \in V.$$

Sei nun $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Welches klassische Problem löst u?

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 8.01.02 **vor** der Vorlesung.

*** Wir wünschen allen Hörern ein frohes Weihnachtsfest ***

*** und einen guten Rutsch ins neue Jahr 2002 ! ***