**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**Fakultät Mathematik und Informatik**
Prof. Dr. A. Arnold

7. April 2001

# Klausur zur Praktischen Mathematik

# SS 2001

Erreichbare Punktzahl : 50 Punkte

Die Klausur ist bestanden bei Erreichen von : 22 Punkten

Beachten Sie bitte die folgenden Hinweise:

Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und numerieren Sie die Blätter fortlaufend durch.
Beginnen Sie mit jeder Aufgabe eine neue Seite. Bleistift und Rotstift dürfen nicht zum Schreiben benutzt werden.
Heften Sie am Schluß der Klausur die Lösungsblätter und das Deckblatt (oben aufliegend!) mit der Büroklammer zusammen (kein Schmierpapier).
Als Hilfsmittel dürfen ausschließlich die Vorlesungs- und Übungsmitschriften dieses Semesters sowie nicht programmierbare Taschenrechner verwendet werden.
Halten Sie den Studentenausweis und ein Lichtbildausweis zur Identitätskontrolle bereit.
Jeder Täuschungsversuch führt zum sofortigen Ausschluß von der Klausur.

Bekanntgabe der Klausurergebnisse:
ab Dienstag, 10.4.2001 (Aushang: Vorlesungsgebäude 27.2).

Klausureinsicht:
Dienstag, 10.4.2001, 10:00 – 12:00 Uhr, Gebäude 36.1, Raum 2.29.

**1. Aufgabe** (6 Punkte (2+2+2))

a) Geben Sie eine vollbesetzte, nichtsinguläre $(3 \times 3)$–Matrix an, bei der der *Gaußalgorithmus ohne Pivotsuche* versagt.

b) Sei $F_k = I - f \cdot e_k^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $f \in \mathbb{R}^n$ eine *Frobeniusmatrix vom Index* $k$ und $e_k$ der $k$–te kanonische Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$ (Spaltenvektor).
Zeigen Sie: Die Inverse ist gegeben durch $F_k^{-1} = I + f \cdot e_k^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

c) Geben Sie mit Hilfe von b) eine Abschätzung für die Kondition $\kappa_\infty$ (bzgl. der Zeilensummennorm) einer Eliminationsmatrix $L_k$ beim Gaußalgorithmus mit Spaltenpivotsuche an!

**2. Aufgabe** (5 Punkte (2+2+1))

Eine Matrix, bei der die Betragssummen aller Zeilen gleich sind, heißt *zeilenäquilibriert*. Zeigen Sie:

a) Durch Linksmultiplikation mit einer geeigneten regulären Diagonalmatrix kann jede reguläre Matrix in eine zeilenäquilibrierte mit Zeilensumme 1 transformiert werden.

b) Ist $A$ eine zeilenäquilibrierte Matrix, dann gilt für jede reguläre Diagonalmatrix $D$: $\kappa_\infty(A) \leq \kappa_\infty(DA)$.

c) Interpretieren Sie die Aussage in b).

**3. Aufgabe** (6 Punkte)

Lösen Sie mit Hilfe einer *QR–Zerlegung* nach dem *Householder–Verfahren* das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Rechenschritte sowie die Matrizen $Q$ und $R$ explizit an.
Hinweis: Jeder Householder–Schritt und die Lösung liefern automatisch eine Rechenkontrolle.

**4. Aufgabe** (5 Punkte)

In den Punkten $x_1 \leq \cdots \leq x_n \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_n$, liegen Meßwerte $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{R}$ vor. Die *Ausgleichsgerade* $y(x)$ ist dann definiert durch

$$\sum_{i=1}^{n} |y(x_i) - f_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |a + bx_i - f_i|^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Geben Sie eine möglichst einfache, *explizite* Formel für $y(x)$ an!
Bemerkung: Eine Formel mit Hilfe der $QR$–Zerlegung ist nicht explizit genug.

**5. Aufgabe** (4 Punkte)

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit dem *Verfahren der konjugierten Gradienten*. Wählen Sie als Startvektor $x_0 = (0,0)^\top$.
Wieviele Iterationen sind (höchstens) dazu nötig?
Hinweis: Am Ende empfielt sich eine Einsetzprobe mit der Lösung.

**6. Aufgabe** (5 Punkte (3+2))

Berechnen Sie mit Hilfe der *Potenzmethode* den Eigenvektor zum betragsmäßig größten Eigenwert $\lambda$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -12 & 12 & -2 \\ -12 & 12 & -2 \end{pmatrix}.$$

Als Startvektor wählen Sie

$$\text{a)} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \text{b)} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nach maximal $n = 3$ Iterationen kann das Verfahren abgebrochen und der Eigenvektor durch $x_n$ approximiert werden. Ermitteln Sie mit Hilfe des *Rayleigh–Quotienten* eine Approximation an den Eigenwert $\lambda$. Interpretieren Sie die Ergebnisse Ihrer Iteration. Bei Ihrer Rechnung können Sie sich auf 3 Nachkommastellen beschränken.

**7. Aufgabe** (5 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{2}{1+x^2}.$$

Bestimmen Sie jeweils ein Interpolationspolynom zweiten Grades nach *Lagrange* sowie nach *Newton* für die Stützstellen $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.
Fügen Sie dann die Stützstelle $x_3 = 0.5$ hinzu und bestimmen Sie das Interpolationspolynom dritten Grades nach Newton.
Hinweis: Man sollte die Interpolationsbedingungen am Ende kontrollieren.

**8. Aufgabe** (5 Punkte)

Berechnen Sie zu $f(x) = (x^2+1)^{-1}$, $x \in [-1,1]$ und $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ den *interpolierenden kubischen Spline* $S$, für den

$$S'(x_0) = f'(x_0), \qquad S''(x_2) = 0$$

gilt.

**9. Aufgabe** (5 Punkte)

Wie groß muß man bei äquidistanter Wahl der Stützstellen $x_j$ $(j = 0, \ldots, n)$ jeweils die Zahl $n$ wählen, damit das Integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{mit} \quad f(x) = \cos x, \quad a = 0, \quad b = 2\pi$$

mittels *Newton–Cotes–Formeln* bis auf 4 Nachkommastellen genau berechnet wird?
Hinweis: Verwenden Sie die Abschätzung

$$\prod_{j=0}^{n} |x - x_j| \leq n! \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1},$$

wobei die Stützstellen $x_j$ im Intervall [a,b] liegen.

**10. Aufgabe** (4 Punkte)

Zur Lösung des Eigenwertproblems

$$Ax = \lambda x, \quad x \neq 0,$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kann auch das *Newton–Verfahren* mit den (reellen) Variablen $(x, \lambda)$ verwendet werden.
Dabei sollen gleichzeitig ein Eigenwert und ein zugehöriger normierter Eigenvektor mit $\|x\|_2^2 = x^\top x = 1$ bestimmt werden.
Wie lautet die Iterationsvorschrift formuliert als lineares Gleichungssystem (möglichst vereinfachen)?