Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

Wintersemester 2000/2001

1. Übungsblatt zur Vorlesung "Praktische Mathematik"

(Gaußsche Eliminationsmethode)

1. Aufgabe (2 Punkte)

Lösen Sie $Ax = b$ mit der Gaußschen Eliminationsmethode (ohne Pivotsuche)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -15 \\ -107 \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe (2 Punkte (1+1))

Zeigen Sie oder widerlegen Sie:

a) Die Inverse einer regulären Dreiecksmatrix ist wieder eine Dreiecksmatrix.

b) Die Inverse einer regulären Bandmatrix ist wieder eine Bandmatrix.

3. Aufgabe (3 Punkte (1+0.5+1.5))

Eine $n \times n$–Matrix F_k heißt *Frobeniusmatrix vom Index* k, wenn sie sich höchstens in der k–ten Spalte unterhalb der Diagonalen von der Einheitsmatrix I unterscheidet. Sei $e^i = (\delta_{ij})_j$ der i–te Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

a) Die $n \times n$–Matrix F_k ist genau dann eine Frobeniusmatrix vom Index k, wenn es ein $f \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

   (i) $F_k = I - f(e^k)^T$,

   (ii) $(e^i)^T f = 0, \qquad i = 1, \dots, k.$

b) Für jede Frobeniusmatrix vom Index k gilt

$$\det F_k = 1.$$

c) Für $k = 1, \dots, n-1$ seien $F_k = I - f^k(e^k)^T$ Frobeniusmatrizen vom Index k. Sei weiter $L = F_1^{-1} \cdot \ldots \cdot F_{n-1}^{-1} = (\ell_{ij})$. Dann gilt:

   (i) $L = I + \sum_{i=1}^{n-1} f^i (e^i)^T$,

(ii) $\ell_{ii} = 1, \quad i = 1, \ldots, n,$

(iii) $\ell_{ij} = 0, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad j = i+1, \ldots, n,$

(iv) $\det L = 1.$

(Hinweis: bei (i) vollständige Induktion)

4. Aufgabe (3 Punkte)

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *diagonaldominant*, falls

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \leq |a_{ii}|$$

für $i = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie: Ist A regulär und diagonaldominant, so ist der Gaußsche Algorithmus ohne Pivotwahl durchführbar.

Anleitung: Betrachten Sie

$$A^{(\mu)} = \begin{pmatrix} A_{11}^{(\mu)} & A_{12}^{(\mu)} \\ 0 & A_{22}^{(\mu)} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A_{22}^{(\mu)} \in \mathbb{R}^{(n-\mu)\times(n-\mu)}.$$

und zeigen Sie mit vollständiger Induktion: $A = A^{(0)}$ regulär und diagonaldominant

$$\Rightarrow \qquad (a_{ij}^{(\mu)})_{i,j=\mu+1,\ldots,n} = A_{22}^{(\mu)} \in \mathbb{R}^{(n-\mu)\times(n-\mu)}$$

ist regulär und diagonaldominant, $\mu = 0, \ldots, n-1$.
Für den Induktionsschritt: "$\mu \to \mu + 1$"

(i) $a_{ii}^{(\mu)} \neq 0.$

(ii) Diagonaldominanz: Verwenden Sie $a_{ij}^{(\mu+1)} = a_{ij}^{(\mu)} + \ldots$, Dreiecksungleichung, sowie umgekehrte Dreiecksungleichung.

(iii) Regularität: $\det A^{(\mu+1)}$ hängt von $\det A^{(\mu)}$ ab.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 31.10. vor der Vorlesung.