

**15. Übungsblatt zur Vorlesung “Praktische Mathematik”**  
(Newton–Cotes–Formeln)

**1. Aufgabe** (2 Punkte)

Betrachten Sie die Quadraturformel  $S(f) = A(f(x_1) + f(x_2))$  zur Berechnung von  $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$ . Wie sind  $A$ ,  $x_1$  und  $x_2$  zu wählen, damit diese Formel für Polynome möglichst hohen Grades exakt ist?

**2. Aufgabe** (2.5 Punkte) (1+1.5)

Zeigen Sie für die Gewichte

$$d_i = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t-t_j}{t_i-t_j} dt, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

der *Newton–Cotes–Formel*  $S_n(f) = \sum_{i=0}^n d_i f(x_i)$  die Eigenschaften

a)  $\sum_{i=0}^n d_i = b - a$

b)  $d_{n-i} = d_i$  im Spezialfall äquidistanter Knoten  $t_i = -1 + i/2/n$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$

Hinweis zu b): Zeigen Sie zunächst, daß für die Lagrangeschen Basispolynome  $L_n$  gilt:  $L_{n-i}(x) = L_i(b+a-x)$ ,  $x \in [a, b]$ .

**3. Aufgabe** (2.5 Punkte) (1.5+1)

Die *offenen Newton–Cotes–Formeln* zur Berechnung von  $I(f) = \int_a^b f(x) dx$  haben die Form

$$S_n(f) = \sum_{i=0}^n d_i f(x_i),$$

wobei die Stützstellen  $x_i$  gegeben sind durch

$$x_i = a + (i+1)h, \quad i = 0, \dots, n \quad \text{mit} \quad h = \frac{b-a}{n+2}.$$

a) Berechnen Sie für  $n = 2$  die Gewichte  $d_i$ , so daß  $S_n$  für alle Polynome vom Grad  $\leq n$  exakt ist.

b) Ermitteln Sie für  $n = 2$  eine Näherung für das Integral

$$I(f) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

und berechnen Sie den Fehler  $|I(f) - S_2(f)|$ .

#### **4. Aufgabe** (3 Punkte)

Die Quadraturformel  $S_n(f) = \sum_{i=0}^n d_i f(x_i)$ ,  $d_i \in \mathbb{R}$ ,  $x_i \in [a, b]$ ,  $x_i \neq x_j$ ,  $i \neq j$ ,  $0 \leq i, j \leq n$  sei exakt für Polynome vom Grad  $\leq m$ .

Zeigen Sie:

Ist  $f \in \mathcal{C}^{m+1}([a, b])$ , so hat das *Restglied*

$$E(f) = \int_a^b f(x) dx - S_n(f)$$

die Darstellung

$$E(f) = \frac{1}{m!} \int_a^b \left( \frac{1}{m+1} (b-t)^{m+1} - \sum_{i=0}^n d_i (x_i - t)_+^m \right) f^{(m+1)}(t) dt.$$

Dabei ist

$$(x_i - t)_+^m = \begin{cases} (x_i - t)^m, & \text{falls } x_i \geq t, \\ 0, & \text{falls } x_i < t. \end{cases}$$

Die Punkte dieses Übungsblattes gehen nicht in die zu erreichende Punktzahl ein. Wer bisher noch nicht die erforderlichen 50% erreicht hat, kann mit diesen Aufgaben sein Punktekonto aufstocken.

**Abgabe** der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 20.2.01 vor der Vorlesung.