Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

Wintersemester 2000/2001

7. Übungsblatt zur Vorlesung "Praktische Mathematik"

(Tschebyscheff–Beschleunigung, Gradientenmethode)

1. Aufgabe (1 Punkt)

Zeigen Sie, daß die *Tschebyscheff–Polynome* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bzgl. dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$ ein Orthogonalsystem bilden.

2. Aufgabe (3.5 Punkte (0.5+1+1+1))

Die *Tschebyscheff–Polynome der 2. Art* U_n sind definiert durch ($x \in [-1, 1]$)

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x, \quad \text{und} \quad U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

Zeigen bzw. berechnen Sie:

a) U_n ist ein Polynom n–ten Grades.

b) $U_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta}, \quad \theta \in (0, \pi).$

c) $U_n(1)$, $U_n(-1)$.

d) $T_n'(x) = nU_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad x \in [-1, 1].$

Hinweis zu b): Vollständige Induktion und $\sin[(n+1)\theta] + \sin[(n-1)\theta] = 2\cos\theta\,\sin(n\theta)$.

3. Aufgabe (2.5 Punkte (1+1.5))

Zeigen Sie, daß die bei der Tschebyscheff–Beschleunigung auftretenden Koeffizienten $\rho_k = 2\sigma_2 T_{k-1}(\sigma_2)/T_k(\sigma_2)$ der Zwei–Term–Rekursion

$$\rho_1 = 2, \quad \rho_{k+1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}\tau^2\rho_k}$$

genügen, wobei $\tau := 1/\sigma_2$. Zeigen Sie ferner für den Grenzwert der Folge $\{\rho_k\}$, daß

$$\lim_{k\to\infty} \rho_k =: \rho = \frac{2}{1 + \sqrt{1-\tau^2}}$$

Hinweis: Sie dürfen voraussetzen, daß die Folge $\{\rho_k\}$ konvergiert.

4. Aufgabe (3 Punkte)

Berechnen Sie, ausgehend vom Startvektor $x_0 = (0,0,0)^\top$, 3 Schritte des vorkonditionierten *Verfahrens des steilsten Abstiegs* zur näherungsweisen Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Verwenden Sie dabei die sog. *diagonale Vorkonditionierung*, d.h. als Vorkonditionierer die Matrix $B = \operatorname{diag}(A)$, die Diagonale von A.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 12.12. vor der Vorlesung.