UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fakultät Mathematik und Informatik
Prof. Dr. A. Arnold

1. März 2001

Klausur zur Praktischen Mathematik

WS 2000/2001

Erreichbare Punktzahl : 50 Punkte

Die Klausur ist bestanden bei Erreichen von : 22 Punkten

Beachten Sie bitte die folgenden Hinweise:

Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und numerieren Sie die Blätter fortlaufend durch.
Beginnen Sie mit jeder Aufgabe eine neue Seite. Bleistift und Rotstift dürfen nicht zum Schreiben benutzt werden.
Heften Sie am Schluß der Klausur die Lösungsblätter und das Deckblatt (oben aufliegend!) mit der Büroklammer zusammen (kein Schmierpapier).
Als Hilfsmittel dürfen ausschließlich die Vorlesungs- und Übungsmitschriften dieses Semesters sowie nicht programmierbare Taschenrechner verwendet werden.
Halten Sie den Studentenausweis und ein Lichtbildausweis zur Identitätskontrolle bereit.
Jeder Täuschungsversuch führt zum sofortigen Ausschluß von der Klausur.

Bekanntgabe der Klausurergebnisse:
ab Montag, 5.3.2001 (Aushang: Vorlesungsgebäude 27.2).

Klausureinsicht:
Montag, 5.3.2001, 10:00 – 12:00 Uhr, Gebäude 36.1, Raum 2.29

Termin für die Klausur im Sommersemester:
Samstag, 7.4.2001, 9:00 – 12:00 Uhr, Hörsaal III.

1. Aufgabe (6 Punkte) (2+3+1)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei eine reguläre Matrix, für die der Gaußalgorithmus ohne Zeilenvertauschungen durchführbar ist.
Das *untere Profil* von A besteht aus den Indexpaaren der folgenden Elemente: In jeder Zeile alle Elemente von dem am weitesten links stehenden Element ungleich Null bis zum Diagonalelement (jeweils einschließlich). Analog besteht das *obere Profil* von A aus den Indexpaaren aller Elemente von der Diagonale bis zum jeweils am weitesten oben stehenden Element ungleich Null in jeder Spalte. Als *Profil* wird die Vereinigung von unterem und oberem Profil bezeichnet.

a) Geben Sie eine mathematische (d.h. formelmäßige) Definition des Profils einer Matrix.

b) Zeigen Sie: Beim Gaußalgorithmus ohne Zeilenvertauschungen werden Elemente außerhalb des Profils von A in keinem Zwischenschritt ungleich Null. Außerdem sind unteres Profil von L und oberes Profil von R im unteren bzw. oberen Profil von A enthalten.

c) Was bedeutet die Aussage aus b) für die Speicherverwaltung während der Zerlegung?

2. Aufgabe (5 Punkte) (2+3)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit.

a) Zeigen Sie: Für die *Cholesky–Zerlegung* $A = CC^\top$ der Matrix A gilt:

$$|c_{ij}| \leq \sqrt{a_{ii}} \qquad j = 1, \ldots, i; \quad i = 1, \ldots, n.$$

b) Berechnen Sie die *Cholesky–Zerlegung* $A = CC^\top$ der positiv definiten Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 7 & 11 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Aufgabe (6 Punkte)

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit einer *QR–Zerlegung* nach dem *Householder–Verfahren*. Geben Sie die Rechenschritte sowie die Matrizen Q und R explizit an.
Hinweis: Jeder Householder–Schritt und die Lösung liefern automatisch eine Rechenkontrolle.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Ein Polynom zweiten Grades soll nach der *Methode der kleinsten Quadrate* an die folgende Meßreihe angepaßt werden:

x	15	16	17	18	19
$f(x)$	26,8	10,3	2,9	5,9	19,1

Bestimmen Sie das Polynom als eine Entwicklung um den Mittelpunkt, d.h.

$$p(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 \text{ mit } a = 17.$$

5. Aufgabe (5 Punkte) (1+4)

a) Bestimmen Sie die inverse Matrix von

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -b & -c & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Diskutieren Sie die Konvergenz von *Gesamt-* und *Einzelschrittverfahren* zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wie sind die Startwerte der Iteration zu wählen?

6. Aufgabe (4 Punkte) (2+2)

Schätzen Sie die Eigenwerte der folgenden Matrizen ohne explizites Ausrechnen möglichst präzise ab. Für die komplexe Matrix soll außerdem eine aussagefähige Skizze gefertigt werden.

$$A = \begin{pmatrix} 4,2 & 0,65 & 3,2 \\ 0,65 & 6,4 & 1,6 \\ 3,2 & 1,6 & 4,8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1+i & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & -0,5i & 0,01 \\ 0,05 & 0,4 & 1-i \end{pmatrix}$$

Können nach dieser Abschätzung die Matrizen A, B Eigenwerte der Vielfachheit 2 oder 3 haben?

7. Aufgabe (5 Punkte)

Berechnen Sie eine *Singulärwertzerlegung* von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Aufgabe (5 Punkte)

Das *Hermite–Interpolationspolynom* $p \in P_{2n+1}$ zur Interpolationsbedingung

$$p(x_k) = f(x_k)\,, \quad p'(x_k) = f'(x_k)$$

für $\quad a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b \quad$ läßt sich schreiben als

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \big[1 - 2\,L_k'(x_k)(x - x_k)\big]\; L_k^2(x)\, f(x_k) + \sum_{k=0}^{n} (x - x_k)\, L_k^2(x)\, f'(x_k)\,,$$

wobei $L_k(x) \in P_n$ die Lagrange–Grundpolynome sind. Beweisen Sie diese Darstellung.

9. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $f(x) = \ln(x)$, $x \in [a,b] = [\frac{1}{3}, 3]$. Bestimmen Sie den *quadratischen Spline* s, der f an den Stützstellen $x_0 = \frac{1}{3}$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ interpoliert und die Bedingung $s'(x_2) = f'(x_2)$ erfüllt.
Hinweis: Eine Kontrollrechnung am Ende ist hilfreich.

10. Aufgabe (5 Punkte)

Zu einer beliebigen Unterteilung $\Delta : a \le x_0 < x_1 < ... < x_n \le b$ des Intervalls $[a,b]$ sei

$$S_n(f) = \sum_{i=0}^{n} d_i f(x_i)$$

eine Quadraturformel. Man zeige, daß ihr *(algebraischer) Genauigkeitsgrad* $\le 2n+1$ ist, das heißt, es gibt ein $p \in P_{2n+2}$ mit $S_n(p) \ne \int_a^b p(x)\,dx$.