Universität des Saarlandes Wintersemester 2000/2001
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

12. Übungsblatt zur Vorlesung "Praktische Mathematik"
(Trigonometrische Approximation, Schnelle Fourier–Transformation)

1. Aufgabe (2 Punkte)

Berechnen Sie zu den gegebenen Werten

x_j	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
f_j	0	$3/16$	0	$15/16$

das *trigonometrische Interpolationspolynom.*

2. Aufgabe (3 Punkte)

Berechnen Sie das *trigonometrische Ausgleichspolynom 1. Grades* T mit

$$T(x) = a + b\,\cos x + c\,\sin x$$

zu den vier Punkten $(0,0)$, $(\pi/2,1)$, $(\pi,-1)$, $(3\pi/2,1)$. Skizzieren Sie die vorgegebenen Punkte sowie die berechnete Ausgleichskurve.

3. Aufgabe (5 Punkte (0.5+0.5+2+2))

Sei $\omega_N := \exp(2\pi i/N)$, $N \in \mathbb{N}$, $i^2 = -1$.

a) Zeigen Sie

(i) $\omega_N^N = 1, \quad \omega_{2N}^N = -1;$

(ii) $\omega_{2N}^j \cdot \omega_N^{j\cdot k} = \omega_{2N}^{j(2k+1)}, \quad k, j = 0, \ldots, N-1.$

b) Sei $\omega_N^{(j)} = (\omega_N^{j\cdot k})_{k=0,\ldots,N-1}$, $\hat{f} = (f_k)_{k=0,\ldots,N-1} \in \mathbb{R}^N$ und $d_j = 2\,[\hat{f}, \omega_N^{(j)}]_N\, \omega_{2N}^{-j}$, $j = 0, \ldots, N-1$, wobei $[c,d]_N = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} c_k \bar{d}_k$.

Man zeige die *Fourier–Synthese*

$$f_k = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{d_j}{2}\, \omega_{2N}^{j(2k+1)}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Darstellung $f_k = \sum_{j=0}^{N-1} [\hat{f}, \omega_N^{(j)}]_N\, \omega_N^{j\cdot k}$.

c) Sind $f_k \in \mathbb{R}$, $\quad k = 0, \ldots, n-1$, $\quad f_{2n-1-k} = f_k$, $\quad k = 0, \ldots, n-1$, so gilt mit $N = 2n$ in b)

   (i) $d_j \in \mathbb{R}, \qquad j = 0, \ldots, N-1,$

   (ii) $d_{2n-j} = -d_j, \qquad j = 1, \ldots, n.$

d) Sei p das Interpolationspolynom zu den Stützpaaren $(x_{k,n}, f_k)$, $k = 0, \ldots, n-1$, wobei $x_{k,n}$ die Nullstellen des n-ten Tschebyscheff–Polynoms $T_n(x)$ der 1. Art sind, sowie $(f_k)_{k=0}^{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Man zeige, daß mit den Koeffizienten d_j aus b), c) gilt

$$p(x) = \frac{d_0}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} d_j T_j(x).$$

Hinweis: Zeigen sie hierzu

   (i) $T_j(x_{k,n}) = \frac{1}{2}\left[\omega_{4n}^{j(2k+1)} + \omega_{4n}^{-j(2k+1)}\right],$

   (ii) $f_k = \frac{d_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} d_j \left(\omega_{4n}^{j(2k+1)} + \omega_{4n}^{-j(2k+1)}\right).$

4. Aufgabe (Praktische Aufgabe) (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Koeffizienten d_j, $j = 0, \ldots, n-1$, des Interpolationspolynoms aus der 3. Aufgabe, Teil d) mit der *schnellen Fourier–Transformation*. Interpolieren Sie dabei

a) $f(x) = x^{1/3}, \qquad x \in [0, 64],$

b) $f(x) = \log(x), \qquad x \in (0, 1],$

mit $N = 2^m$, $m = 2(2)10$. (Das Intervall [-1,1] ist affin–linear auf [0,64] bzw. [0,1] zu transformieren.) Berechnen Sie den auftretenden Fehler an (den linear zu transformierenden) Stellen

$$x_j = -1 + j/10, \qquad j = 1, 2, \ldots, 20.$$

Zur Auswertung von $p(x) = d_0/2 + \sum_{j=1}^{n-1} d_j T_j(x)$ verwende man folgende *Verallgemeinerung des Horner–Schemas*:

$$\begin{aligned} b_n &:= b_{n+1} := 0, \\ b_k &:= 2x b_{k+1} - b_{k+2} + d_k, \qquad k = n-1, n-2, \ldots, 0, \\ p(x) &= \frac{b_0 - b_2}{2}. \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe (3 Punkte)

Warum funktioniert das obige Horner–Schema und warum ist es numerisch vorteilhaft?

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 30.1.01 vor der Vorlesung.
Abgabe der Lösungen zu der praktischen Aufgabe am Di, 6.2.01 in den Sprechstunden.