Universität des Saarlandes
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Arnold / M. Ehrhardt

Wintersemester 2000/2001

13. Übungsblatt zur Vorlesung "Praktische Mathematik"

(Splines)

1. Aufgabe (2 Punkte)

Bestimmen Sie den *natürlichen kubischen Spline* s, der $f(x) = x^3$ an den Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ interpoliert.
Wie lautet das Ergebnis, wenn man die natürlichen Randbedingungen durch $s''(x_0) = f''(x_0)$, $s''(x_2) = f''(x_2)$ ersetzt?

2. Aufgabe (3 Punkte)

Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar. Weiterhin sei s die stückweise linear interpolierende Funktion von f bezüglich der Stützstellen $x_j = a + jh$, $h = (b - a)/n$, $0 \le j \le n$, $n \in \mathbb{N}$, d.h. es gilt $s(x_j) = f(x_j)$, s ist stetig und $s\,\big|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \Pi_1$.
Wir definieren $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$.
Zeigen Sie:

a) $\|f - s\|_\infty \le \dfrac{h^2}{8}\,\|f''\|_\infty$

b) $\max\limits_{0\le j\le n-1} \|(f' - s')_{]x_j, x_{j+1}[}\|_\infty \le h\,\|f''\|_\infty$.

3. Aufgabe (3 Punkte)

Bisher wurde die Einkommensteuer aufgrund folgender Funktion berechnet:

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) = 0, & x < 5000\,, \\ s_1(x) = 0.2x - 1000, & 5000 \le x < 20000\,, \\ s_2(x) = 5 \cdot 10^{-6}x^2 + 1000, & 20000 \le x < 50000\,, \\ s_3(x) = 0.5x - 11500, & x \ge 50000\,. \end{cases}$$

Nun soll eine Steuerreform durchgeführt werden, bei der diejenigen mit geringem Einkommen stärker entlastet werden sollen als diejenigen mit gehobenem Einkommen. So soll für Personen mit einem Einkommen von 20000 DM sich der Steuersatz um 20% senken, während bei einem Einkommen von 50000 DM sich der Steuersatz nur um 10% senken soll. Die Bereiche sollen dieselben bleiben. Ferner sollen s_1^N und s_3^N weiterhin linear, s_2^N quadratisch und $s_0^N \equiv 0$ sein. Die Übergänge sollen diesselben bleiben und stetig sein. Insbesondere sollen an den Übergängen s_1^N zu s_2^N und s_2^N zu s_3^N auch die Ableitungen stetig sein. Wie lautet die neue Berechnungsfunktion $s^N(x)$?

4. Aufgabe (2 Punkte)

Berechnen Sie den *kubischen Spline* s, der die Funktion $f(x) = \frac{\pi}{4} \sin x$ an den Stellen $x_j = j \cdot \frac{\pi}{2}$, $0 \leq j \leq 4$, interpoliert und die periodischen Randbedingungen $s'(0) = s'(2\pi)$, $s''(0) = s''(2\pi)$ erfüllt.

Abgabe der Lösungen zu den theoretischen Aufgaben am Di, 6.2.2001 vor der Vorlesung.

Fortsetzung der Vorlesung "Praktische Mathematik" im SS 2001:

"Höhere Numerik" (= "Praktische Mathematik II")

(4h VL + 2h UE)

Themen:

1. Numerische Lösung des Anfangswertproblems gewöhnlicher Differentialgleichungen (Einschritt– und Mehrschrittverfahren, Schrittweitensteuerung)
2. Rand– und Eigenwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen (Theorie, Differenzenverfahren, Variationsmethoden, Schießverfahren)
3. Randwertprobleme partieller elliptischer Differentialgleichungen